PRIMES 2016 Set G – General, M – Advanced

Bitte schicken Sie uns ihre Lösungen als Teil ihrer Bewerbung bis **1 Dezember, 2015**.

Diesen Set enthält zwei Teile: "Allgemeine mathematische Probleme" und "Fortgeschrittene mathematische Probleme".

Lösen Sie so viele Probleme, wie sie können.

Die Lösungen schickt man an:
`swiss.primes@gmail.com`

Sie können die Lösungen tippen oder von Hand aufschreiben und scannen. Die Dateiname muss mit ihrer Nachname anfangen, z. B. "Muster-lösungen". Im Kopf der Datei soll man den vollen Name, z. B. Max Muster, angeben.

Schreiben Sie nicht nur die Antworten, sondern Beweise, Teilergebnisse und Ideen, falls Sie die Aufgaben nicht komplett lösen können.

Es ist erlaubt beliebige Hilfsmittel zu brauchen, **ausser Hilfe von anderen Personen**. Falls Sie Bücher oder Internetseiten brauchen, geben Sie bitte die Referenzen an.

WARNUNG: Man darf diese Aufgaben nicht auf "problem-solving" Seiten posten!

Einige dieser Aufgaben sind ziemlich schwierig. Wir empfehlen sie nicht auf den letzten Tag zu schieben. Denken Sie über diese Aufgabe über geraume Zeit (immer wieder) nach. Wir empfehlen Ihnen sich zu bewerben, falls Sie mindestens 50% der Aufgaben gelöst haben.

Für weitere Informationen:

`http://nccr-swissmap.ch/education/highschool/primes`

Viel Spass!

Allgemeine mathematische Aufgaben

Aufgabe G1

Es sei N eine natürliche Zahl. Ein Casino lässt einen ein Spiel $G(N)$ spielen. In diesem Spiel $G(N)$ würfelt man mit einem fairen Würfel (6 Seiten mit Punktzahlen von 1 bis 6) bis N Mal. Nach jedem Wurf kann man entweder das Spiel beenden, dann bekommt man das Quadrat der Zahl, die man gerade geworfen hat, oder das Spiel fortsetzen in der Hoffnung auf die bessere Zahl. Nach dem N-ten Wurf muss man das Geld nehmen.

Zum Beispiel könnte man im Spiel $G(2)$ eine 5 werfen und dann nochmals werfen in der Hoffnung eine 6 zu werfen. Sollte dann im zweiten Wurf eine 1 fallen, bekommt man nur 1 Franken.

a) Man beschreibe eine Strategie, welche die Erwartung des Gewinns maximiert.

b) Wie gross ist dieser Erwartungswert?

Aufgabe G2

a) Es sei n eine positive gerade Zahl. Kann man die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in drei nicht-leere Teilmengen so aufteilen, dass
die Summe der Zahlen in der ersten Menge durch $n + 1$ teilbar ist,
die Summe der Zahlen in der zweiten Menge durch $n + 2$ teilbar ist,
die Summe der Zahlen in der dritten Menge durch $n + 3$ teilbar ist.

b) Für welche ungeraden positiven Zahlen n kann man eine solche Aufteilung konstruieren?

Aufgabe G3

Man spielt ein Spiel mit einem 52 Kartenstapel mit dem Ziel, 3 Karten der gleichen Farbe (4 Gruppen a 13 Karten) zu bekommen. Im ersten Zug nimmt man drei zufällige Karten – $K1, K2$ und $K3$.

1. Falls $K1, K2, K3$ die gleiche Farbe haben, hat man gewonnen.
2. Falls $K1, K2, K3$ lauter verschiedene Farben haben, legt man sie zurück, mischt die Karten und nimmt wieder 3 Karten heraus. Sind sie nun alle der gleichen Farbe, gewinnt man, sonst verliert man.
3. Falls genau ZWEI der drei Karten die gleiche Farbe haben, legt man die dritte Karte zurück, mischt und nimmt eine Karte heraus. Wenn die neue Karte die gleiche Farbe hat, wie die zwei, die man behalten hat, gewinnt man, sonst verliert man.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man?
Gib die Antwort in der Form eines gekürzten Bruchs an.

Aufgabe G4
In einer Paartherapiesitzung sollen n Paare um einen runden Tisch auf $2n$ Stühle so gesetzt werden, dass keine Person seine/ihren Ehegatten/in als Nachbar/in hat. Wie viele verschiedene Sitzordnungen gibt es?
Wie viele Anordnungen gibt es für 5 Paare?

Aufgabe G5
Eine Null-Eins Matrix A *enthält* eine andere Null-Eins Matrix P, wenn eine Submatrix von A in P transformiert werden kann, indem man einige Einser durch Nullen ersetzt. Sonst *vermeidet* die Matrix A die Matrix P.

Wir betrachten folgendes $PVC(n, P)$ Spiel:
Die Anfangsposition ist eine $n \times n$ Matrix, die nur aus Nullen besteht.
Zwei Spieler ändern abwechslungsweise Nullen zu Einsern.
Wenn nach einem Zug eines Spielers eine Matrix entsteht, die die Matrix P *enthält*, verliert dieser Spieler.

Wenn keine Dimension von P grösser als n ist, hat $PVC(n, P)$ Spiel immer einen Gewinner. Wir definieren $W(n, P)$ als Gewinner des $PVC(n, P)$ Spiels vorausgesetzt, dass beide Spieler eine optimale Strategie anwenden.

a) Man bestimme $W(n, P)$ für jedes $n \geq k$, wenn P eine $k \times 1$ Matrix mit lauter Elementen 1 ist.

b) Man bestimme $W(n, P)$ für jedes $n \geq 2$, wenn $P = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Aufgabe G6
n Baüme wachsen in Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ einer Ebene. Keine drei Bäume wachen auf einer gemeinsamen Gerade. Eine zyklische Ordnung Z von Punkten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ heisst *sichtbar*, wenn es einen Punkt P auf der Ebene gibt, aus dem die Bäume in der Reihenfolge Z sichtbar sind.

Man zeige, dass es für $n \geq 7$ eine zyklische Ordnung gibt, die nicht *sichtbar* ist.
Wie sieht es aus für den Fall $n = 6$?

Aufgabe G7
Eine Permutation s von n Elementen hat die Ordnung 2016 (d.h. die kleinste Anzahl Wiederholungen von s, die zur ursprünglichen Position von s führt, ist 2016). s

Welches ist der kleinstmögliche Wert von n?
Gib ein Beispiel einer solchen Permutation s für die minimale Zahl n?
(Hinweis: man betrachte die zyklische Darstellung von s).

Fortgeschrittene mathematische Aufgaben

Aufgabe M1
Es gibt n Haufen Münzen. In einem Zug darf man einige Haufen auswählen und die gleiche Anzahl Münzen aus diesen Haufen nehmen. Für eine gegebene Menge Haufen ist ihre *Haufenzahl* die minimale Anzahl Züge, die man braucht um alle Münzen zu entfernen. Zum Beispiel wenn man drei Haufen mit 1, 2 und 3 Münzen hat, kann man alle Münzen in drei Zügen entfernen, wenn man in einem Zug alle Münzen aus einem Haufen nimmt. Die *Haufenzahl* beträgt aber 2, da man es auch in 2 Zügen schaffen kann.

Man bestimme mit Beweis die *Haufenzahlen* der folgenden Haufenmengen:
- $1, 2, 3, 10, 20, 30, 100, 200, 300$.
- $1, 2, 3, 11, 12, 13, 101, 102, 103$.
- $1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123$.
- Jede Folge natürlicher Zahlen der Länge n, in der jede nächste Zahl von der dritten beginnend gleich der Summe der zwei Vorgänger ist.

Aufgabe M2
Es sei $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

a) Man zeige, dass $f_n(x) > 0$ für alle reellen x, wenn n gerade ist und, wenn n ungerade ist, $f_n(x) = 0$ genau eine reelle Lösung hat.
Hinweis: man benutze den Zusammenhang zwischen f_n und ihrer Ableitung.

b) Man zeige, dass alle komplexen Lösungen der Gleichung $f_n(x) = 0$ *einfach* sind, d.h. wenn $f_n(z_0) = 0$, dann $f'_n(z_0) \neq 0$.

c) Es sei $n = 2k + 1$ für natürliche Zahl k und $c = \lim_{k\to\infty} \frac{x_n}{n}$ (dieser Grenzwert existiert). Man bestimme c. Stelle die Antwort in der Form einer Lösung einer Gleichung dar und berechne sie bis zur vierten Nachkommastelle.
Hinweis: Benutze den Zusammenhang zwischen $f_n(x)$ und Funktion e^x.

Aufgabe M3
Es sei p eine Primzahl.

a) Man bestimme die Anzahl der quadratischen $n \times n$ Matrizen A über das Feld $\mathbb{F}_p$ von p Elementen, für die $A^p = A$ gilt.

b) Es sei $p \geq 3$. Man bestimme die Anzahl der quadratischen $n \times n$ Matrizen A über $\mathbb{F}_p$, für die $A^2 + 1 = 0$ gilt. Hier 1 ist die Identitätsmatrix und 0 ist die Matrix, deren Elemente alle 0 sind.
Hinweis: Man soll zwei Fälle für p unterscheiden.

Aufgabe M4
Natürliche Zahlen m und n und eine Menge S von Teilmengen einer Menge A sind gegeben. Jede Teilmenge in S hat höchstens m Elementen. Angenommen $|\, S\,| > (n-1)^m \cdot m!$.

Man beweise, dass es n Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n \in S$ gibt, für die folgendes gilt:
Für alle Paare (i,j) mit $i \neq j$ sind die Schnittmengen $A_i \cap A_j$ gleich.

Aufgabe M5
Man bestimme die Anzahl der Färbungen eines Kuboktaeders mit n Farben bis auf Rotationen, d.h. zwei Färbungen, die durch eine Rotation ineinander übergehen, werden als gleich betrachtet.

Aufgabe M6
Es seien $D_i, i \geq 1$ Kreisscheiben mit Radien $r_i < 1$, die alle im Einheitskreis D liegen, sodass $D = \cup_{i\geq 1} D_i$.

a) Man zeige, dass für jedes $0 < a < 1$ die Reihe $\sum_i r_i^a$ divergiert.

b) Man zeige, dass $\sum_i r_i$ divergiert.

c) Kann man für ein bestimmtes $a > 1$ D_i so wählen, dass $\sum_i r_i^a$ konvergiert?

d) Kann man a) und b) lösen, wenn die Vereinigung von D_i nicht unbedingt ganz D ist, sondern eine Teilmenge $D' \subset D$ mit der Fläche π?
Hinweis: Man betrachte die Schnittmenge von D_i mit dem Kreis mit Radius $1-t$ um den Ursprung.
Für d) betrachte den Ring zwischen diesem Kreis und dem Einheitskreis.