PRIMES 2016

Voici les problèmes mathématiques du PRIMES 2016. Merci de nous envoyer vos solutions avant le 1er décembre 2015 comme partie de votre dossier de candidature PRIMES. Ce document contient deux parties : "Problèmes de mathématiques générales" et "Mathématiques avancées". Il est important de résoudre autant de problèmes que vous le pouvez dans ces deux parties.

Les solutions doivent être envoyé à l'adresse
`swiss.primes@gmail.com`.

Vous pouvez taper les solutions ou les écrire à la main puis les scanner. Le nom du fichier doit commencer par votre nom de famille, par exemple "dupont-solutions." Mettez votre nom complet dans l'en-tête du document.

N'écrivez pas seulement les solutions, mais aussi les démonstrations (et solutions partielles/résultats partiels/idées si vous ne parvenez pas à résoudre complètement un problème). Outre la procédure d'admission, vos solutions seront utilisées pour décider quels projets vous conviendraient le mieux si vous êtes acceptés dans PRIMES.

Vous avez le droit d'utiliser toutes sorte de ressources pour répondre à ces problèmes, *sauf l'aide d'autres personnes.* Cela signifie que vous pouvez vous servir de calculatrices, d'ordinateurs, de livres et d'Internet. Si vous utilisez des livres ou Internet, merci de nous donner une référence.

ATTENTION: Poster ces problèmes sur des sites webs de résolutions de problèmes est absolument interdit! Les participants ayant recours à de telles méthodes serons disqualifiés, et leurs parents ainsi que les personnes ayant recommandé les participants en seront avertis.

Notez que certains de ces problèmes sont délicats. Nous vous recommandons de ne pas attendre le dernier jour pour vous y attaquer. Essayez plutôt d'y réfléchir de temps en temps en faisant des pauses. Nous vous encourageons à postuler si vous pouvez résoudre au moins 50% des problèmes.

Plus d'information sur le programme PRIMES:
`http://nccr-swissmap.ch/education/highschool/primes`.

Bonne chance!

1. Problèmes de mathématiques générales

Problème G1. Soit N un entier strictement positif. Un casino au bord de la faillite vous laisse jouer au jeu $G(N)$. Dans ce jeu, vous lancez un dé (à six faces numérotées de 1 à 6, non pipé) jusqu'à N fois d'affilée. Après chaque lancer, vous pouvez soit arrêter le jeu et recevoir le carré du nombre affiché sur le dé après votre dernier lancer, soit relancer le dé en espérant obtenir un meilleur lancer - au n-ième lancer, vous devez prendre l'argent et vous arrêter. Par exemple, dans le jeu $G(2)$, vous pouvez d'abord obtenir un 5 au premier lancer, relancer le dé en espérant avoir un 6, et finalement obtenir un 1 lors de votre deuxième lancer : vous repartez avec 1 Franc.
(a) Décrivez une stratégie maximisant l'espérance de ce jeu.
(b) Quelle est l'espérance maximale?

Problème G2. (a) Soit n un nombre entier pair strictement positif. Peut-on séparer les nombres $1, \dots, n$ en trois groupes non vides tels que la somme des nombres du premier groupe soit divisible par $n+1$, celle des nombres du deuxième groupe par $n+2$ et par $n+3$ dans le troisième?
(b) Pour quel nombre entier impair n peut-on faire cela?

Problème G3. Imaginez que vous jouiez à un jeu dont le but est de rassembler trois cartes de la même couleur (coeur, carreau, trèfle ou pique). Vous commencez par prendre au hasard trois cartes dans un jeu de 52 cartes. Appelons ces trois cartes $C1, C2, C3$.
1. Si $C1, C2, C3$ sont de la même couleur, vous avez gagné.
2.Si $C1, C2, C3$ sont de trois couleurs différentes, vous devez les remettre dans le paquet, mélanger et piocher trois cartes à nouveau. Si cette fois elles sont toutes de la même couleur, vous avez gagné, sinon vous avez perdu.
3.Si parmi $C1, C2, C3$, exactement deux cartes font partie de la même couleur, vous remettez la troisième dans le paquet, mélangez et piochez à nouveau une carte. Si elle appartient à la même couleur que les deux autres, vous avez gagné, sinon vous avez perdu.
Quelle votre chance de gagner? (Donnez la réponse sous forme de fraction irréductible).

Problème G4. Lors d'une session de thérapie de couple, n couples doivent s'asseoir autour d'une table ronde (sur $2n$ chaises), mais personne ne doit être assis à côté de son époux ou de son épouse. De combien de manières peuvent-ils s'asseoir? Quel est ce nombre pour 5 couples?

Problème G5. Une matrice A contenant uniquement des 0 et des 1 *contient* une autre matrice du même type P si une sous-matrice de A peut être transformée en P en changeant des 1 en 0. Sinon, on dit que A *évite* P.
On considère le jeu d'évitement suivant, noté $PAG(n, P)$: on commence avec la matrice $n \times n$ ne contenant que des zéros, puis deux joueurs changent

chacun leur tour un zéro en un. Si un des deux joueurs fait apparaître la matrice P comme sous-matrice, alors ce joueur a perdu.
Si P est de dimension $k \times l$ avec $k, l \leq n$, alors $PAG(n, P)$ aura toujours un gagnant. On définit $W(n, P)$ comme étant le gagnant de $PAG(n, P)$ si les deux joueurs emploient des stratégies optimales.
(a) Déterminer $W(n, P)$ pour tout $n \geq k$ pour P une matrice $k \times 1$ remplie de 1.
(b) Déterminer $W(n, P)$ pour tout $n \geq 2$ pour P une matrice identité 2×2:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problème G6. Supposons que n pins poussent aux points $T_1, \dots, T_n$ du plan (jamais trois pins sur une même ligne). Un ordre cyclique C de $T_1, .., T_n$ (c'est-à-dire un ordre à permutation cyclique près) est dit *visible* s'il existe un point P dans le plan depuis lequel une personne voit les arbres $T_1, ..., T_n$ dans l'ordre C. Montrez que si $n \geq 7$, alors il existe un ordre cyclique qui n'est pas visible. Que dire du cas $n = 6$?

Problème G7. Une permutation s de n éléments est d'ordre 2016 (i.e, le nombre minimum de répétitions de s pour retomber sur la position initiale des éléments est 2016). Quelle est la valeur minimale possible de n? Donnez un exemple d'un tel s pour n minimal. *(Indice : utilisez la décomposition en cycles de s).*

2. Mathématiques avancées

Problème M1. Il y a devant vous n piles de pièces. En un mouvement, vous pouvez choisir plusieurs piles et enlever le même nombre de pièces de chacune de ces piles. Pour un ensemble de piles donnée, on appelle *caractéristique de l'ensemble* le nombre minimal de mouvements nécessaires pour enlever toutes les pièces de toutes les piles. Par exemple, si vous avez trois piles comprenant respectivement 1, 2 et 3 pièces, il est possible d'enlever toutes les pipes en trois mouvements, en prenant chaque pile une par une. Mais la caractéristique de l'ensemble est 2, car il est possible de le faire en 2 mouvements : prendre les piles avec 2 et 3 pièces , enlever 2 pièces dans chaque pile, puis prendre les deux piles contenant 1 pièce et les enlever.
Trouvez les caractéristiques des ensembles suivant (avec une preuve) :

- 1,2,3,10,20,30,100,200,300.
- 1,2,3,11,12,13,101,102,103.
- 1,3,4,7,11,18,29,47,76,123.

• toute suite d'entiers naturels de longueur n dans laquelle chaque terme, à partir du troisième, est la somme des deux précédents.

Problème M2. Soit $f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.
(a) Montrez que $f_n(x) > 0$ pour tout x réel si n est pair, et que f_n possède une unique racine réelle x_n si n est impair.
Indice : utilisez la relation entre f_n et sa dérivée.
(b) Montrez que toutes les racines complexes de f_n sont simples (i.e., si a est une racine de f_n alors $f_n^{'}(a) \neq 0$).
(c) Soit $n = 2k + 1$ pour un entier strictement positif k, et $c = lim_{k\to\infty} \frac{x_n}{n}$ (on sait que cette limite existe). Trouvez c. (Représentez la réponse comme la solution d'une équation, et calculer sa valeur avec quatre chiffres significatifs). *Indice : Utilisez la relation entre $f_n(x)$ et la fonction e^x.*

Problème M3. Soit p un nombre premier.
(a) Trouvez le nombre de matrices carrées A de taille n sur le corps $\mathbb{F}_p$ à p éléments telles que $A^p = A$.
(b) Supposons que $p \geq 3$. Trouvez le nombre de matrices carrées A de taille n sur le corps $\mathbb{F}_p$ telles que $A^2 + 1 = 0$ (où 1 est la matrice identité et 0 la matrice remplie de zéros). Vous pourriez avoir besoin de considérer deux cas pour p.

Problème M4. Soit deux entiers $m, n > 0$ et une collection S de sous-ensembles (distincts) d'un ensemble $\mathcal{A}$, chacun de taille au plus m. Supposons que $\mid S \mid > (n-1)^m m!$. Prouvez qu'il existe n ensembles $A_1, \ldots, A_n \in S$ tels que les intersections $A_i \cap A_j$ soient identiques pour toutes les paires (i, j) avec $i \neq j$.

Problème M5. . Trouvez le nombre de colorations des faces du cuboctaèdre (https://fr.wikipedia.org/wiki/Cuboctaèdre) à n couleurs, à rotation près (i.e. deux colorations équivalentes par rotations sont considérées comme identiques).

Problème M6. . Soient $D_i, i \geq 1$ des disques de rayons $r_i > 1$ contenus dans le disque unité D, tels que $D = \cup_{i\geq 1} D_i$.
(a) Montrez que pour tout $0 < a > 1$, la série $\sum_i r_i^a$ diverge.
(b) Montrez que $\sum_i r_i$ est divergente.
(c) Pour tout $a > 1$, pouvez-vous choisir D_i tel que $\sum_i r_i^a$ converge?
(d) Pouvez-vous résoudre (a) et (b) si l'union des disques D_i n'est pas forcément D mais un sous-ensemble $D' \subset D$?
Indice. Considérer l'intersection de D_i avec le cercle de rayon $1 - t$ centré à l'origine, ou pour (d) l'anneau entre ce cercle et le cercle unité.