Cosmologie et relativité générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

SwissMAP
The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Didactique de la physique

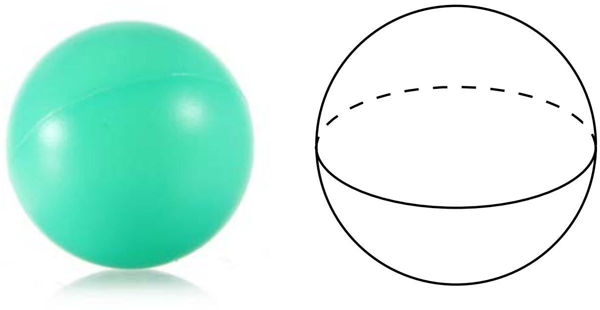
Série 4 : Courbure

Exercice 1 : Solides

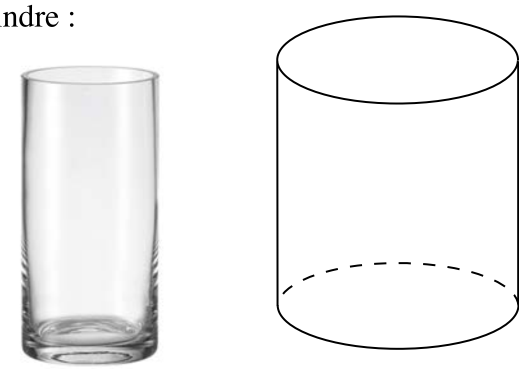
a) À chacun des objets (ou morceau d'objets) suivants on associe le solide schématisé à côté. À la surface de chaque solide, colorier

- en gris les parties de surfaces, lignes ou points constitués de points à courbure *de Gauss* k_G positive ;
- en bleu les parties de surfaces, lignes ou points constitués de points avec k_G négative ;
- en rouge les parties de surfaces, lignes ou points avec k_G nulle.

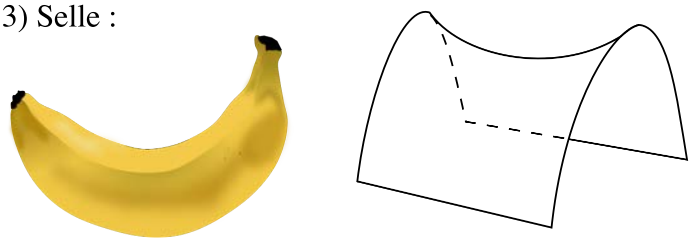
1) Sphère :



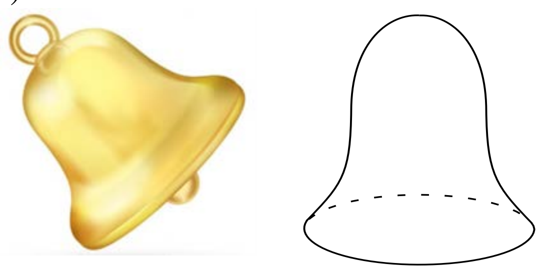
2) Cylindre :



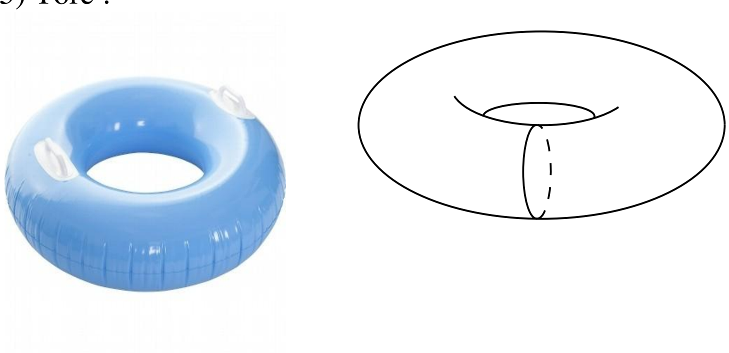
3) Selle :



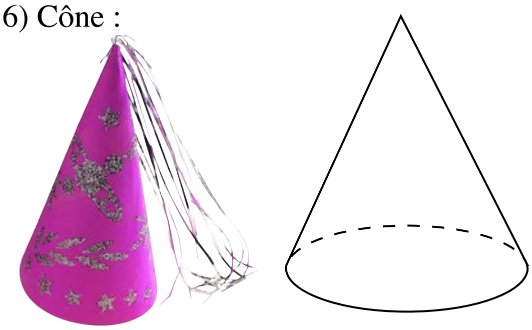
4) Cloche :



5) Tore :



6) Cône :



b) Pour chaque solide colorié, peut-on déterminer quel est le signe de la courbure *totale* K ? La calculer si possible.

Exercice 2 : Cercle osculateur d'une parabole

Considérons la parabole d'équation $y_p(x) = x^2$.

a) Déterminer le rayon de courbure R du cercle osculateur à cette parabole au point (0;0). Quelle est sa courbure en ce point ?

b) Trouver la courbure de la même parabole, mais au point (1;1).

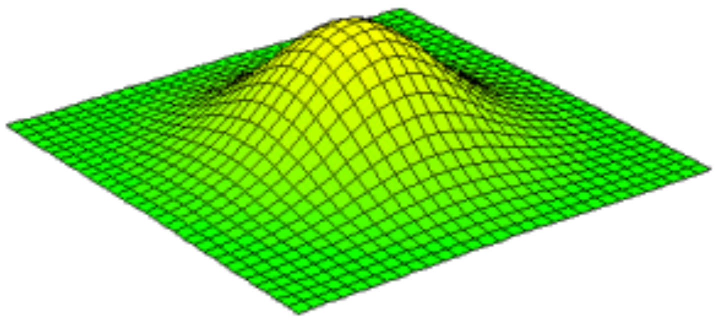
c) Ecrire l'équation donnant la courbure en un point générique de la parabole (x ; $y = x^2$) en fonction de l'abscisse du point : $k(x)$.

d) Pourquoi parler du cercle osculateur d'une droite ne fait pas de sens ?

Méthode conseillée : écrire l'équation générique du cercle puis expliciter $y_c(x)$ (attention au choix du signe de la racine). Ensuite résoudre le système en imposant 1) le passage par le point choisi, 2) l'égalité des dérivées premières $y'_c = y'_p$ et 3) l'égalité des dérivées secondes $y''_c = y''_p$.

Exercice 3 : La bosse

Imaginez une fine feuille souple et plate. On appuie légèrement avec un doigt par dessous en poussant vers le haut, jusqu'à créer une bosse comme celle de la figure ci-contre.



Crédit : paololazzarini.it.

a) Quelle est la courbure de Gauss des points sur la feuille avant qu'on appuie ? Et la courbure totale de la feuille ?

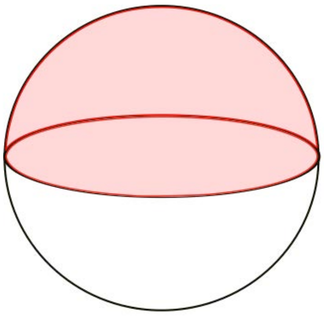
b) Mêmes questions, mais après la déformation.

Exercice 4: Transport parallèle

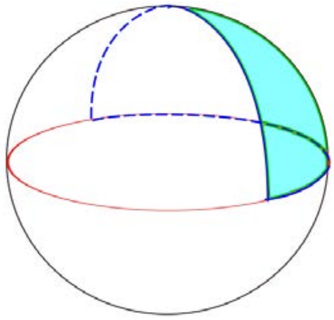
a) En utilisant la définition de courbure totale d'une surface et le raisonnement, déterminer quelle est la courbure totale de la surface
1) d'une sphère ;
2) d'une demie sphère (figure ci contre, en haut à gauche);
3) d'un quart de sphère (figure ci contre, en haut à droite);
4) d'un huitième de sphère (figure ci contre, en bas).

b) Utiliser la méthode du transport parallèle pour vérifier les 4 résultats donnés au point a). Pour le huitième de sphère tester les deux possibilités : en partageant le quart dans les deux sens possibles, de sorte à obtenir un triangle ou un « biangle » (figure ci contre, en bas).

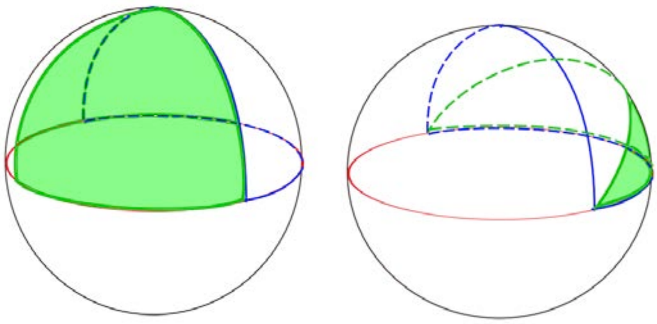
2)



3)



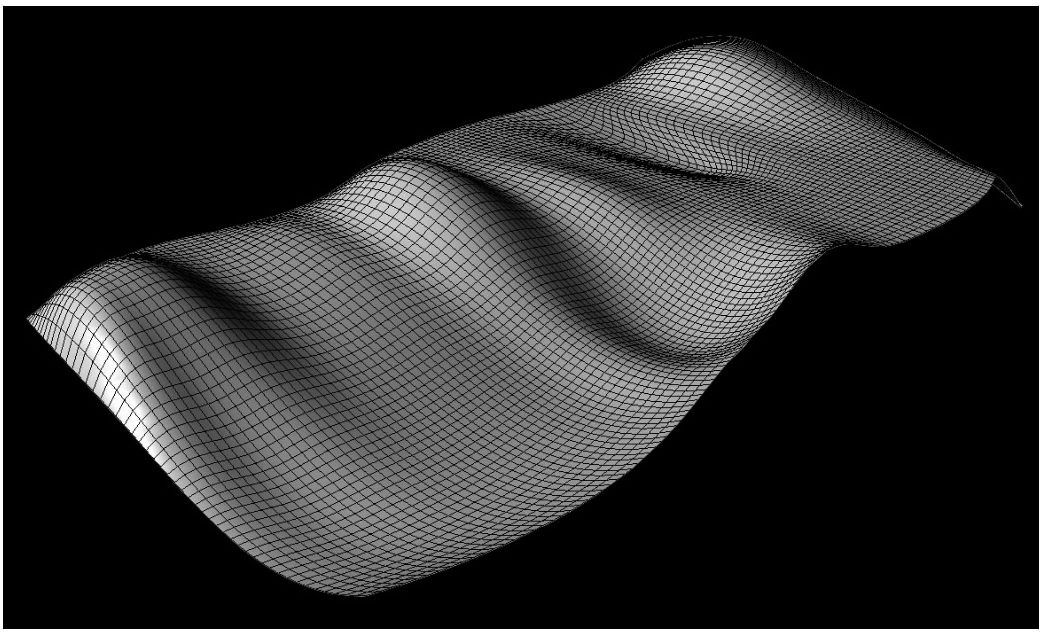
4)



c) Généraliser les résultats donnés au point a) : quelle est la courbure totale de la surface de la n-ième partie d'une sphère ?

Exercice 5: La toiture

La surface suivante représente un projet de toiture : il y a 10 zones visibles et distinctes à courbure de Gauss positive, et 10 zones visibles à courbure de Gauss négative. Colorier les zones à courbure positive au crayon rouge, et les zones à courbure négative (certaines adjacentes) au crayon bleu.



Crédit : http://design.rootiers.it/strutture/comments/recent_calcolo?page=2

Exercice 6: Le cylindre

a) Sur une feuille A4 (ou un autre format) placez deux points P et Q tels que leur distance soit du même ordre de grandeur que la taille de la feuille. Tracer la géodésique passant par ces deux points. Est-ce qu'elle correspond au plus court chemin entre ces deux points ?

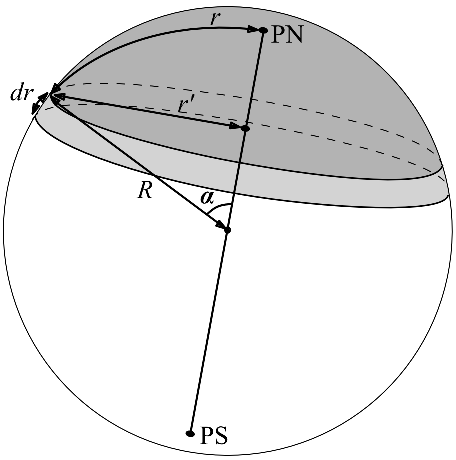
b) Avec la même feuille, construire un cylindre en collant deux bords opposés, de sorte que la géodésique tracée au point a) soit à l'extérieur.

- Est ce que la géodésique tracée au point a) reste une géodésique du cylindre ? Est-elle encore le plus court chemin entre P et Q ? Si non, tracer le plus court chemin sur le cylindre.
- Combien de géodésiques reliant P et Q existent à la surface du cylindre ?
- Qu'est ce qu'il se passe si au lieu de dessiner les points P et Q comme indiqué au point a), on les dessine très proches, au milieu de la feuille ? Que peut-on en déduire ?

Exercice 7 : Cercles, disques et sphères dans un espace courbe

Dans un espace 2D plat les formules du périmètre et de l'aire d'un disque de rayon r sont
$P(r) = 2\pi r$ et $A(r) = \pi r^2$.

a) En vous aidant de le figure ci-contre, écrire les équations correspondantes à celles cités ci-dessus, mais dans un espace courbe, avec courbure de Gauss constante positive $k = 1/R^2$ (la sphère du dessin) : $P(r,R)$ et $A(r,R)$.



b) Pour les deux formules trouvées au point a), vérifier que pour les valeurs limites
- $r = 0$ (au pôle nord, point PN),
- $r = \pi R/2$ (à l'équateur),
- $r = \pi R$ (au pôle sud, point PS),

on a les résultats attendus, par exemple pour le périmètre $P\,(r = 0) = 0$, $P\,(r = \pi R/2) = 2\pi R$ et $P\,(r = \pi R) = 0$.

c) En suivant la même procédure que pour l'aire et le périmètre d'un cercle de rayon r, donner la formule du volume d'une sphère de rayon r dans un espace 3D courbé avec rayon de courbure constante positive.
Méthode conseillée : Considérer un espace uniformément courbé (rayon de courbure R). De la même manière que l'aire (2D) d'un cercle de rayon r correspond à celle de la calotte de rayon r sur la sphère 3D de rayon R, le volume d'une sphère (3D) de rayon r correspond au volume de la calotte de l'hypersphère 4D de rayon R. Pour ce point il n'y a pas de visualisation possible, il faut faire confiance aux calculs… et tester le résultat avec le cas limite $r \rightarrow 0$.

Les liens suivants donnent l'accès à deux BD qui donnent une intuition de ce qui se passe avec les grandeurs géométriques dans un espace courbe.
Le géoméricon :
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/geometricon.htm
Le trou noir :
http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/trou_noir.htm