

Cosmologie et relativité générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
 - Série 2 : Expansion
 - Série 3 : Principe d'équivalence
 - Série 4 : Courbure
 - Série 5 : Lentilles gravitationnelles
 - Série 6 : Trous noirs
 - Série 7 : Equations cosmologiques
 - Série 8 : Chronologie du Big Bang
 - Série 9 : Ondes gravitationnelles
-
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
 - Activité expérimentale 2 : La courbure du cône



SwissMAP

The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research



**UNIVERSITÉ
DE GENÈVE**

Didactique de la physique

©Terms of use

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

Cosmologie et relativité générale : Activités pour les élèves du Secondaire II,

Série 5 : Lentilles gravitationnelles

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

Série 5 : Lentilles gravitationnelles

Exercice 1 : Angle de déviation α (analyse dimensionnelle)

On peut trouver une formule pour l'angle de déviation sans facteur numérique (facteur qui est 2 pour Newton et 4 pour Einstein), mais d'une manière plus simple : l'analyse dimensionnelle.

L'idée est de considérer que cette déviation doit dépendre de uniquement 3 quantités :

1) L'accélération gravitationnelle à la distance la plus proche de la lentille gravitationnelle

$$g = \frac{GM}{d^2}, \text{ puisque il s'agit d'une accélération, son unité fondamentale est le } \mathbf{m \cdot s^{-2}};$$

2) Le paramètre d'impact d (la distance de passage), dont l'unité SI est le \mathbf{m} ;

3) La vitesse de passage c , dont l'unité SI est le $\mathbf{m \cdot s^{-1}}$;

Puisque la déviation est un angle, sans dimensions, ses unités SI sont des radians. Donc dans une combinaison $\alpha \propto g^p \cdot d^q \cdot c^r$, où p , q , et r sont des nombres entiers, les mètres et les secondes doivent forcément se simplifier. Utiliser cela pour trouver des contraintes pour les exposants entiers p , q , et r . Choisir la solution la plus simple pour trouver la formule (sans facteur numérique) de la déviation.

Exercice 2 : Déviation par le Soleil

Selon la formule relativiste, obtenue en 1915 par A. Einstein, la déviation d'un rayon de lumière est deux fois plus grande que selon le calcul approximatif newtonien. Expérimentalement, on peut mesurer cette déviation de la lumière provenant d'une étoile lointaine lorsqu'elle passe près du Soleil. L'idée est de mesurer la position d'une étoile dans le ciel lorsque le Soleil n'est pas présent, puis de comparer cette position avec celle mesurée lorsque l'image du Soleil est près de celle de l'étoile : l'image sera décalée d'un angle α .

Mais, pour ce faire, il est nécessaire de prendre cette deuxième mesure pendant une éclipse solaire totale, sinon la lumière du jour ne permettrait pas de voir celle de l'étoile.

L'observation de l'angle de déviation de la lumière d'étoiles pendant l'éclipse solaire de 1919 par Eddington fut la première expérience en faveur d'une confirmation de la théorie d'Einstein.

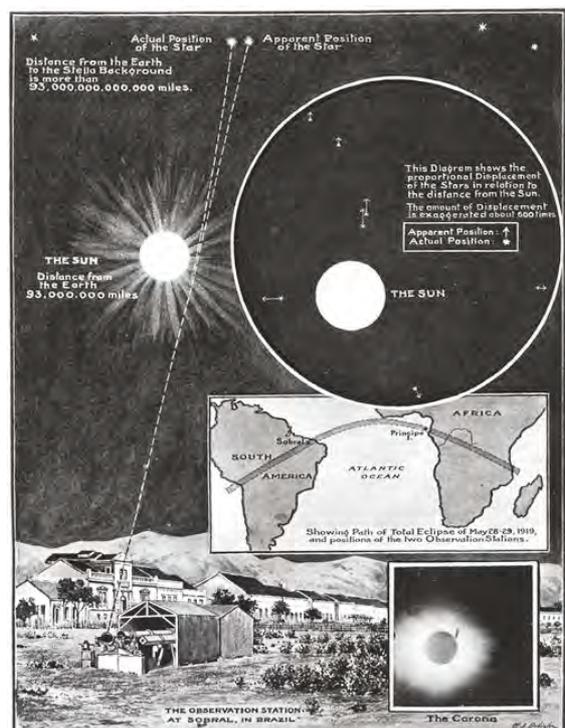
Les images suivantes sont celles parues dans "The New York Times" du 10 novembre 1919, elles célèbrent la confirmation de la Relativité Générale.

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less
Agog Over Results of Eclipse
Observations.

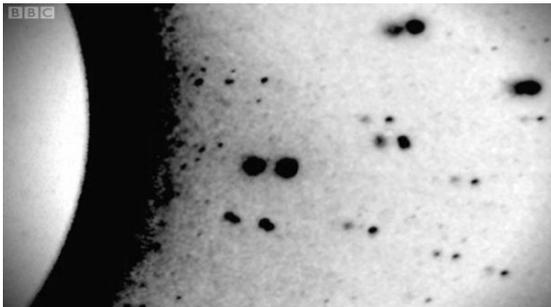
EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed
or Were Calculated to be,
but Nobody Need Worry.



En réalité la mesure d'Eddington n'était pas assez précise pour confirmer définitivement la Relativité. Le graphique ci-dessous, à droite, montre son résultat et les autres résultats obtenus tout au long du siècle dernier, en mesurant l'angle de déflexion de la lumière pour des différentes longueurs d'onde du spectre électromagnétique (visible et radio), mais aussi en mesurant le retard dans l'émission du signal (effet « Shapiro ») à cause de la courbure de l'espace-temps. Le paramètre γ dans l'axe des y mesure l'écart de la prévision relativiste: $\alpha = \alpha_{Einstein} \cdot (1+\gamma)/2$. Plus γ s'approche de l'unité, plus l'angle mesuré est en accord avec la prédiction d'Einstein; plus il s'approche de 0 plus il confirme le résultat newtonien. Les flèches vers le haut indiquent que la barre d'incertitude sort du graphique.

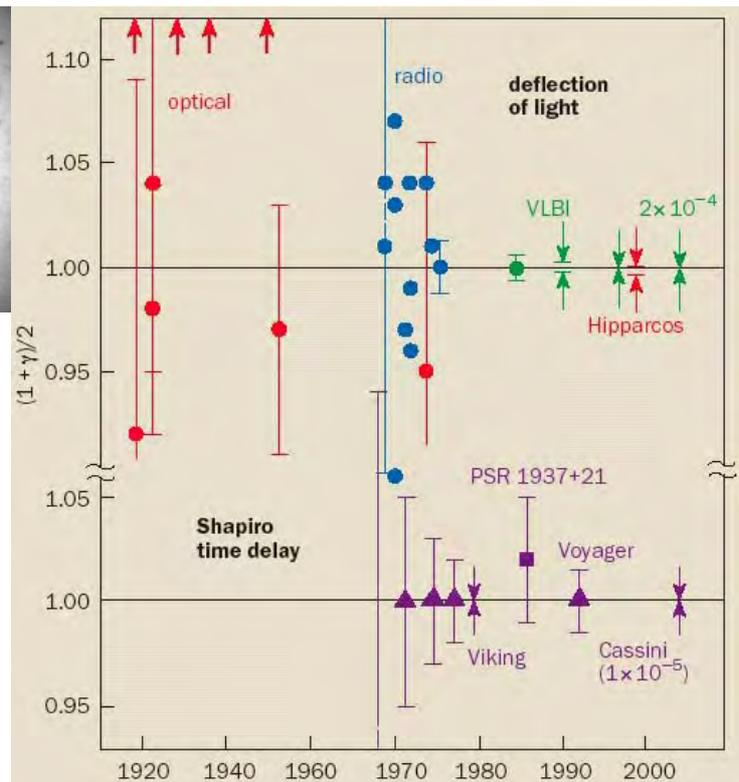
Dans les images ci dessous à droite : en haut on observe la position des étoiles en présence du Soleil (décalée) par rapport à la position observée en l'absence du Soleil ; en bas une image de la sonde Cassini, mesurant le paramètre γ par le temps de retard de la réception du signal.



Crédit: Arthur Eddington,
<https://briankoberlein.com/2014/05/19/einstein-eddington/>



Crédit : NASA/JPL-Caltech



Crédit : <http://physicsworld.com>

Calculer la déviation d'un rayon de lumière passant à une distance $d = R_{Soleil}$ du centre du Soleil en utilisant

- 1) la formule newtonienne,
- 2) la formule relativiste.

Lien Earthmagazine :

<http://www.earthmagazine.org/article/benchmarks-solar-eclipse-proves-relativity>



Lien ESA :

http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Relativity_and_the_1919_eclipse



Exercice 3 : Lensing lunaire ?

On peut facilement mesurer une déviation de l'ordre de $1'$ pour l'image d'une source.

- Convertir $1'$ en radians. Donner cette conversion avec un nombre de chiffres significatifs facile à retenir.
- Calculer le paramètre d'impact d (distance de passage, cf. exercice 1 de cette série ou chapitre 5 de la théorie) qu'un rayon de lumière doit avoir pour que la Lune produise une déviation $\alpha \approx 1'$.
- Pourquoi la Lune ne peut pas produire du lensing gravitationnel observable? Quel devrait être l'ordre de grandeur de sa densité pour qu'elle produise du lensing observable?



Crédit : <http://www.worldmaponline.com>

Exercice 4 : RCS2 032727-132623

L'image suivante a été prise par le télescope Hubble en 2012. En jaune brillant, au centre, on observe l'amas de galaxies RCS2 032727-132623, à environ 2Gpc de nous.



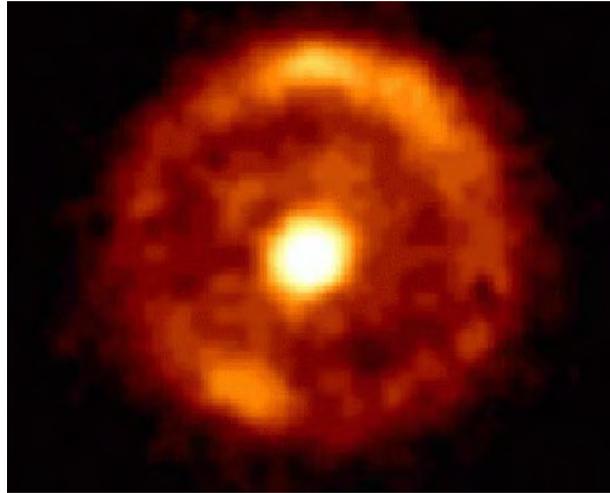
Crédit: NASA, ESA, J. Rigby, K. Sharon and M. Gladders and E. Wuyts,
<http://www.space.com/14481-hubble-photo-brightest-galaxy-gravitational-lens.html>

- Indiquer quels sont les indices permettant d'affirmer que cet amas est une lentille gravitationnelle. Expliquer sa réponse par un schéma en indiquant la trajectoire des rayons de lumière jusqu'à l'observateur.
- De quel type de lensing gravitationnel s'agit-il ? Justifier.
- Pourquoi n'observe-t-on pas d'anneau d'Einstein dans ce cas ?
- Peut-on distinguer des images de la même source ?

Exercice 5 : L'anneau d'Einstein

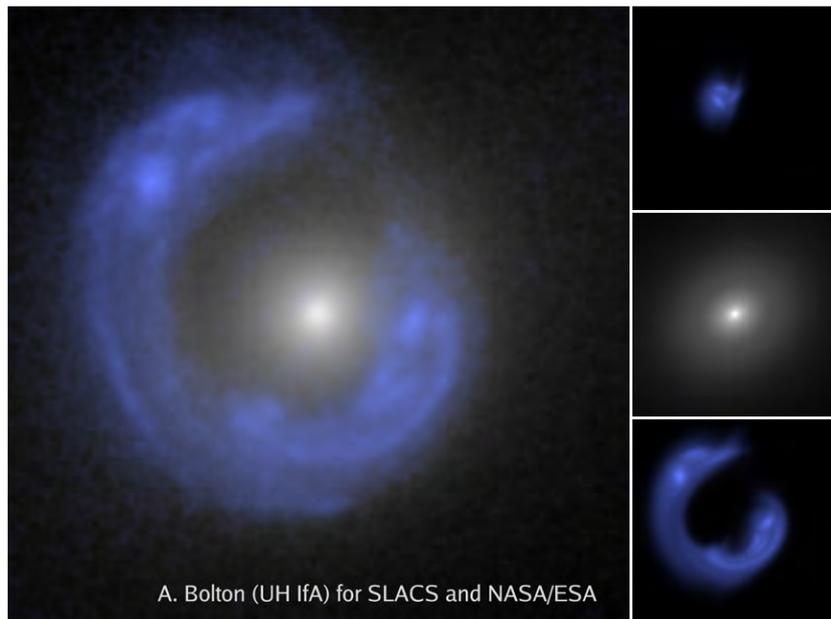
Le premier anneau d'Einstein, B1938+666, fut observé en 1998 par L. J. King et al. Même si l'image est seulement d'environ 1 seconde d'arc, le diamètre de l'anneau mesure en réalité de dizaines de kpc.

La figure ci-dessous date aussi de 1998 et est l'image de la galaxie SDSSJ1430 (en bleu) vue au travers d'une lentille gravitationnelle (en blanc au centre on voit la galaxie, beaucoup plus proche, qui joue le rôle de lentille). Les images de droite, du haut en bas représentent respectivement :



Crédit : <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/einring.html>

- 1) une reconstruction informatique de comment devrait apparaître l'image de la source sans lentille,
- 2) la lentille toute seule et
- 3) l'image déformée seule.



A. Bolton (UH IfA) for SLACS and NASA/ESA

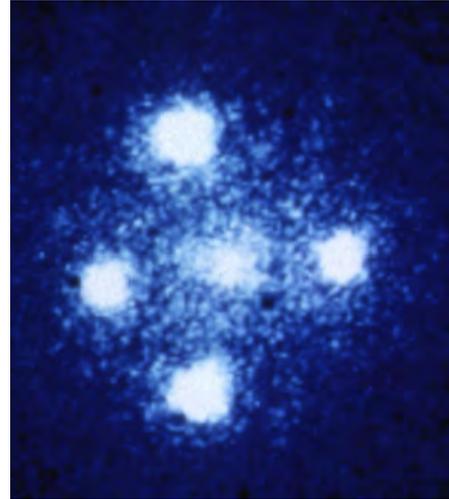
Crédit : <http://apod.nasa.gov/apod/ap080728.html>

- a) Expliquer dans quelles conditions nous pouvons observer ce type d'images.
- b) Les astrophysiciens utilisent ces observations pour estimer la masse de la lentille : ils mesurent les redshifts pour la lentille $z_L = 0,285$ et pour la source $z_s = 0,575$, ainsi que le rayon d'Einstein $\theta = 1,51''$. En utilisant ces données calculer la masse de la lentille. Donner le résultat en kg et en masses solaires, M_{Soleil} . *Ne pas oublier de convertir θ en radians.*
- c) Combien de chiffres significatifs a ce résultat? Quelles sont les sources d'incertitude?
- d) Pourquoi ce type d'estimation de masses à grandes échelles sont importantes en cosmologie moderne ?

Exercice 6 : La croix d'Einstein

La photo de la croix d'Einstein ci-contre date de 1990 et est la plus détaillée jamais produite de cet objet. Les 4 images qui forment la croix ont un redshift de 1,7, ce qui correspond à la distance de 3Gpc, alors que la galaxie au centre a un redshift de 0,0394.

De plus, on a mesuré la distance angulaire moyenne entre les quatre images de la croix et le centre (que nous pouvons considérer comme une bonne estimation du rayon d'Einstein associé): 0,8 secondes d'arc.



Credit: NASA, ESA, and STScI

- Expliquer (1) quel est le phénomène à la base de cette observation, (2) quelles sont les conditions pour que cette image en forme de croix se produise.
- En utilisant la loi de Hubble, vérifier que la distance de la galaxie au centre de l'image est de 0,2Gpc.
- En déduire la distance entre la galaxie au centre (L) et la source des 4 images (S).
- Déterminer le rayon d'Einstein de cette image en radians.
- Ecrire la formule reliant ce rayon d'Einstein à la masse de la galaxie au centre de l'image.
- En déduire une estimation de la masse de la galaxie au centre de l'image en kg, puis en masses solaires.

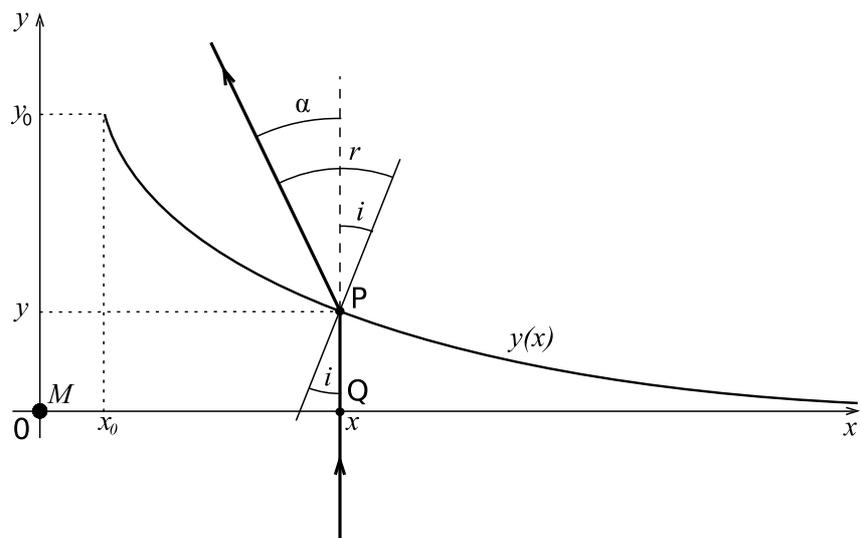
Exercice 7 : Pourquoi un verre à vin ?

- a) On peut simuler le strong lensing en utilisant une lentille optique (en plexiglas par exemple), à condition que son profil soit bien choisi. Expliquer pourquoi un profil biconvexe n'est pas convenable.

Considérons une lentille optique d'indice de réfraction n , dont la forme est semblable à celle d'un pied de verre à vin. Nous voulons savoir quel devrait être son profil pour qu'elle simule une lentille gravitationnelle ponctuelle de masse M .

Le graphique suivant représente une modélisation de la lentille souhaitée: sa base est plate (l'axe des x) et le profil est donné par la fonction $y(x)$, inconnue. Nous souhaitons qu'elle ait le même effet gravitationnel qu'une masse M située à l'origine des coordonnées.

- b) Imaginons un rayon de lumière incident perpendiculairement à la base de la lentille en un point générique Q assez éloigné du centre, de coordonnées $(x; 0)$. Le rayon ne subira pas de déviation en ce point, pourquoi ?



- c) Par contre il sera dévié au point $P(x; y(x))$, à la sortie du milieu.

Ecrire la loi de la

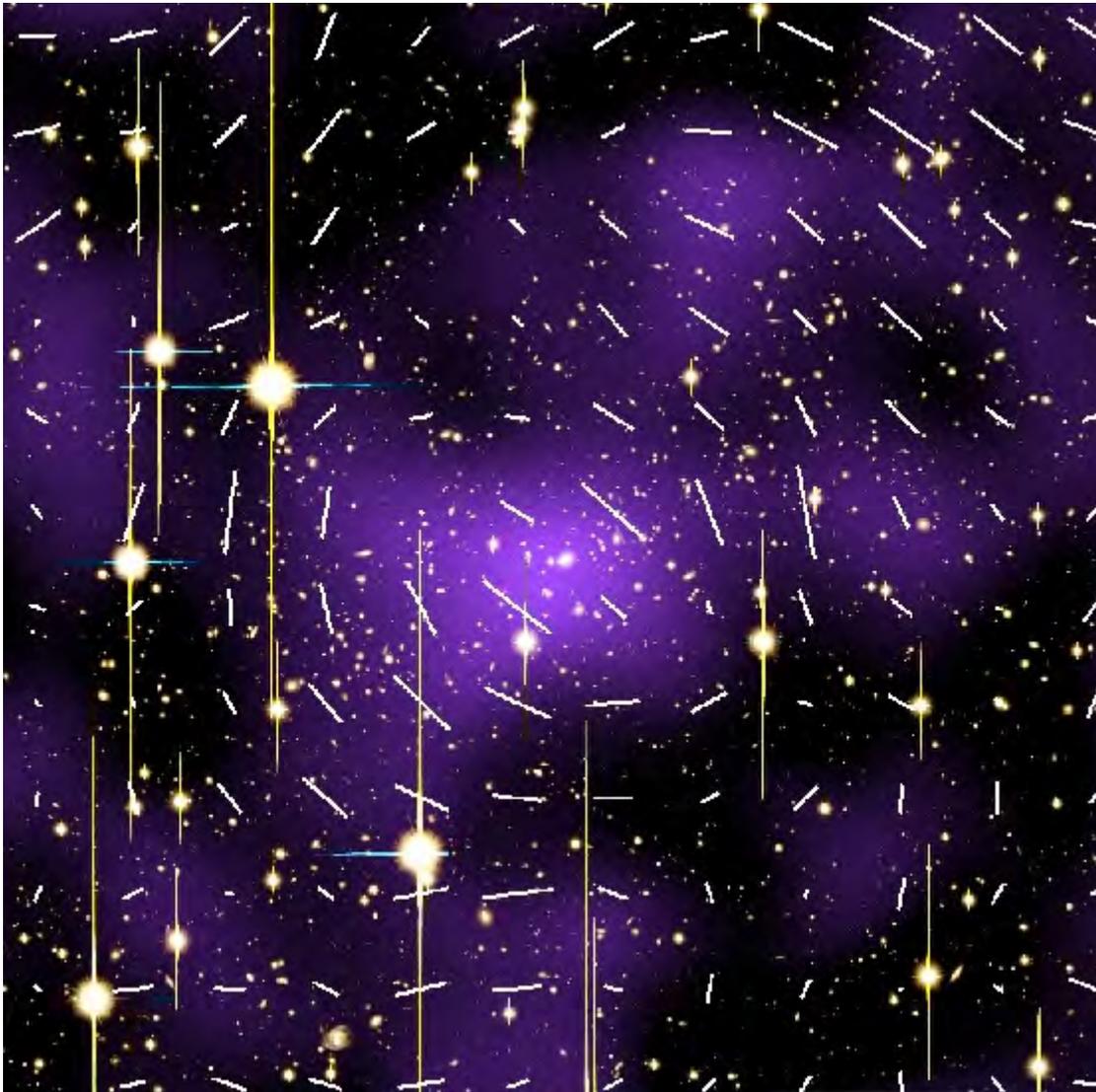
réfraction reliant les angles r , i et l'indice de réfraction n , avec l'approximation $\sin(r) \cong r$ et $\sin(i) \cong i$ (car $r \ll i$ et $i \ll 1$).

- d) En sachant que $r = i + \alpha$, où $\alpha = 4GM/c^2 x$ est la déviation que nous souhaitons avoir pour le rayon de lumière (déviation *inversement* proportionnelle à la distance de passage entre le rayon de lumière et la masse M , cf. exercice 1 de cette série), et en utilisant l'équation trouvée au point c), écrire la relation entre i , n et α , puis expliciter i en fonction de G , M , c , x et n : puisque G , M , c et n sont des constantes, nous avons trouvé comment doit varier l'angle d'incidence en fonction de x : $i(x)$.

- e) Puisque i est l'angle entre le rayon incident (vertical) et la normale à la courbe $y(x)$ au point P , la tangente à cette courbe en ce point est $y'(x) = \frac{dy}{dx} = -i(x)$. Remplacer l'expression obtenue au point d) pour $i(x)$ puis intégrer cette équation pour trouver le profil $y(x)$.

Exercice 8 : A2390

Voici une image de l'amas de galaxies A2390. La taille angulaire de cette image est de $12'$ fois $12'$, et dans chaque cellule ($1'$ fois $1'$) des lignes ont été ajoutées.



Crédit: Oguri, Masamune et al. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 405 (2010) 2215-2230 arXiv:1004.4214 [astro-ph.CO] (<https://inspirehep.net/record/853072/plots>)



- Peut-on dire qu'un effet de lentille gravitationnelle est présent dans cette image ? Si oui dire de quel type de lensing s'agit-il. Dans tous les cas, justifier sa réponse.
- Que représentent les lignes ajoutées dans chaque cellule de l'image ?
- Que représentent les « nuages » en violet (plus clairs) ?