Cosmologie et relativité génélrale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

SwissMAP
The Mathematics of Physics
National Centre of Competence in Research

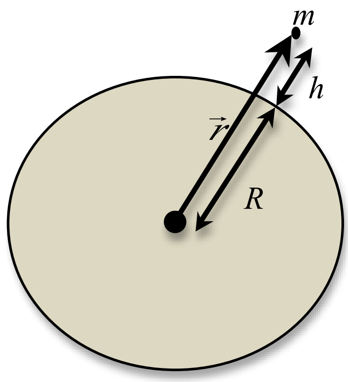
UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Série 6 : Trous noirs

Exercice 1 : Energie potentielle gravitationnelle

Dans le cours de deuxième année, vous avez appris que l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet à la surface de la Terre est $E_g(h) - E_g(0) = E_g(r) - E_g(R) = mgh$ où h est sa hauteur par rapport à la surface terrestre ($h = r - R$, où r est la distance du centre de la Terre et R le rayon de la Terre) et m sa masse .

Cette formule est valable seulement si h est négligeable par rapport au rayon de la Terre. De cette manière $g = GM_T / r^2$ peut être considéré comme constant, en effet : $r = R + h \cong R$
=> $g \cong GM_T / R^2$.



Sinon, il faut utiliser l'expression plus générale pour l'énergie potentielle gravitationnelle qui est (cours)

$$E_g(r) = -\frac{GM_T m}{r^2}.$$

Démontrer que si $\boldsymbol{h \ll R}$ <=> $\boldsymbol{r = R + h \cong R}$, alors $E_g(r) - E_g(R) \cong mgh$, où $g = \frac{G M_T}{R^2}$, selon sa définition.

Suggestion : développer la différence algébriquement :

$$E_g(r) - E_g(R) = -\frac{G M_T m}{r} + \frac{G M_T m}{R} = -\frac{G M_T m}{R+h} + \frac{G M_T m}{R} = \frac{\dots}{(R+h)\cdot R} = \dots \cong mgh.$$

Exercice 2 : Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération pour un objet lancé depuis

(I) la surface terrestre,
(II) la surface de Mars,
(III) la surface lunaire.

Exercice 3 : La composition de l'atmosphère des planètes

La température (en K) d'un gaz est directement proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de ses particules. Si nous négligeons les mouvements de vibration et de rotation des particules, cette proportionnalité se traduit par la relation

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T,$$

où k_B est la constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Annexe E.1).

a) En utilisant la formule de l'énergie cinétique d'une particule de masse m et vitesse v et la relation de proportionnalité entre E_k et T, exprimer la vitesse moyenne des particules d'un gaz en fonction de la température du gaz et de la masse des particules : $v_T\,(m\,;T)$. Cette vitesse s'appelle ***vitesse thermique*** du gaz.

b) Calculer la valeur de la vitesse thermique de l'oxygène à la température moyenne à la surface de la Terre : 15°C : $v_T\,(O_2;15°C)$. Est-ce que cette vitesse est plus grande ou plus petite pour l'hydrogène H_2 ? Et pour l'azote N_2 ? *Répondre sans effectuer des calculs.*

c) Comparer cette vitesse avec la vitesse de libération terrestre, en calculant le rapport

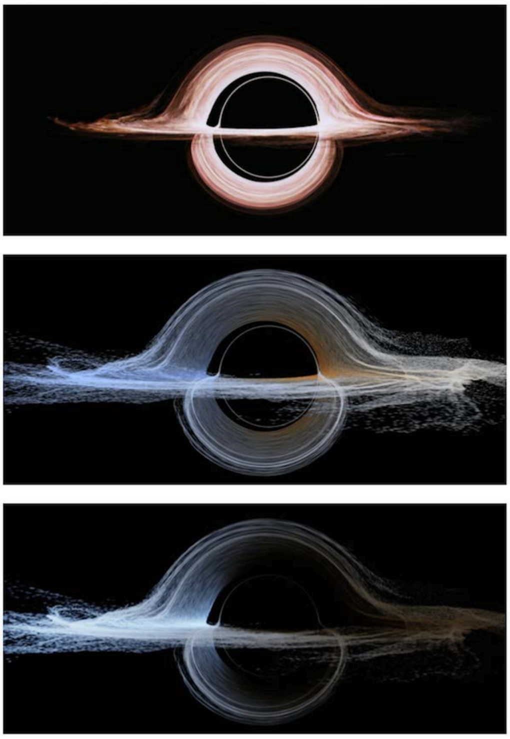
   $\eta_{Terre} = v_T\,(O_2;15°C)\,/v_{l\ Terre}$.

d) Faire les mêmes calculs qu'aux points b) et c) mais pour la Lune ~~à~~ lors de sa formation, en sachant que la température moyenne sur la Lune à cette époque (il y a 4 milliards d'années) était d'environ 2000°C (1 chiffre significatif).

e) Expliquer pourquoi la Lune n'a pas d'atmosphère.

Lien utile pour les prochains exercices : table des ODG des densités
https://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_(density)

Exercice 4 : Le rayon de Schwarzschild



Les images ci-contre montrent Gargantua, le trou noir du film « Interstellar », du haut au bas : comment il a apparu dans le film, et comment il aurait dû apparaître si la science avait été plus importante que le spectacle, selon les simulations de K. Thorne et al., du moins réaliste au plus réaliste. Dans les trois images le trou noir est en rotation (antihoraire en le regardant depuis le haut) avec un disque d'accrétion : la matière rayonnante qui est en train de précipiter et qui tourne également à des grandes vitesses.

Crédit : O. James et al., Class. Quantum Grav. 32 065001 (2015), et http://io9.com/the-truth-behind-interstellars-scientifically-accurate-1686120318

a) Indiquer quel est le rayon de Schwarzschild dans chacune des images de Gargantua, et expliquer pourquoi l'image du trou noir est enveloppée par dessous et par dessus d'un disque lumineux.

b) Expliquer pourquoi dans les images plus réalistes le disque d'accrétion présente des nuances en bleu ou en rouge.

c) Calculer le rayon de Schwarzschild d'un trou noir ayant une masse égale à celle de la Terre. Quelle devrait être la densité de la Terre si toute sa masse était concentrée à l'intérieur de son rayon de Schwarzschild ? Connaît-on des objets avec cette densité ?

d) Faire les mêmes calculs qu'au point c) pour le Soleil.

Vidéos :

Simulation de la collision entre deux trous noirs: http://apod.nasa.gov/apod/ap151020.html

Si une étoile s'approche trop d'un trou noir: http://apod.nasa.gov/apod/ap151028.html

Exercice 5 : Notre univers est-il un trou noir ?

a) Ecrire la formule exprimant la densité moyenne d'un trou noir en fonction de sa masse $\rho_{tn}(M)$. S'agit-il d'une fonction constante, croissante ou décroissante ?

b) À partir de cette formule déterminer l'ordre de grandeur de la densité d'un trou noir avec une masse égale à

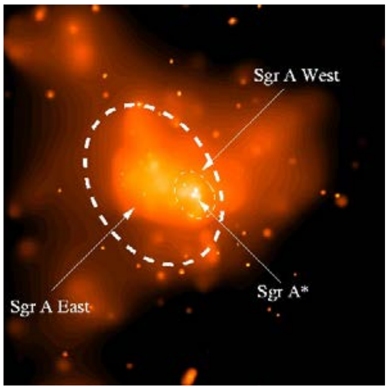
I. une tonne : $\rho_{tn}(1\text{t})$. ;

II. celle de la Terre : $\rho_{tn}(M_{Terre})$ (comparer avec le résultat de l'exercice 4) ;

III. celle d'une grosse étoile (environ 10 fois la masse du Soleil) : $\rho_{tn}(10M_{Soleil})$;

IV. celle du noyau de notre galaxie, SgrA* : $\rho_{tn}\,(3{,}5\cdot10^6\,M_{Soleil})$;

Le noyau de notre galaxie contient un trou noir supermassif dont la masse est de environ 3,5 millions de masse solaire. Les scientifiques ont déduit sa présence en mesurant la vitesse de rotation rapide des étoiles autour de la source de rayons X Sgr A*
https://www.e-education.psu.edu/astro801/content/l8_p7.html



Crédit : NASA Chandra X-Ray Observatory and Penn State University.

V. celle de l'univers observable : une sphère de rayon $r_H = c/H_0$ et de densité moyenne égale à la densité critique $\rho_c = 3H_0^2/\,8\pi G$. *Suggestion : avec la densité critique, trouver d'abord la masse contenue dans le rayon de Hubble : M_H, ensuite calculer $\rho_{tn}(M_H)$.*

c) Calculer le résultat V. algébriquement.

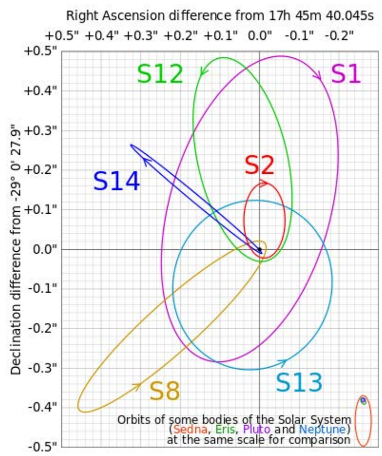
Exercice 6 : Le trou noir supemassif dans Sgr A*

Nous admettons que le mouvement de S2 est circulaire et uniforme, de rayon r = 1200 UA, soit 10 fois plus grand que son périhélie (Série 1, exercice 5) et sa vitesse scalaire est constante et égale à la vitesse scalaire moyenne sur une orbite: $v = v_m$. Nous savons que la masse de cette étoile est de plusieurs ordres de grandeur plus petite que celle du trou noir au centre de l'orbite : $m \ll M$.
À partir des résultats de l'exercice 5 de la Série 1, répondre aux points suivants.

a) Donner une estimation de la masse contenue à l'intérieur de l'orbite de S2, en kg et en M_{Soleil}. *Utiliser les équations du mouvement circulaire uniforme (MCU).*

b) Calculer le rayon de Schwarzschild d'une telle masse et le comparer au rayon de l'orbite de S2.

c) Nous savons que le périhélie d'une autre étoile orbitant autour du trou noir supermassif, S14 (connue aussi sous le nom de S0-16), est de 45 UA. Pourquoi nous pouvons affirmer que la masse contenue à l'intérieur de l'orbite de ces deux étoiles est un trou noir?



Crédit : By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15252541

Exercice 7: NCG1232 au travers d'un trou noir

Les deux images suivantes montrent la même galaxie, NCG1232, avec le redshift $z = 0{,}0053$.


Crédit : http://arachnoid.com/relativity/index.html et https://fr.wikipedia.org/wiki/NGC_1232

À gauche, NCG1232 apparaît comme nous l'observons actuellement ; à droite elle apparaît comme nous l'observerions si un trou noir de 4,3 millions de masses solaires était intercalé à mi-chemin entre nous (l'observateur, O) et NCG1232 (la source, S).

a) Répondre aux points suivants :
   - Quel est le phénomène qui explique la formation de l'image de droite ?
   - Dessiner un schéma indiquant les positions de S, de O et du trou noir ainsi que la trajectoire des rayons de lumière.
   - Comment appelle-t-on le cercle lumineux observé dans l'image de droite et quelles sont les conditions pour qu'un tel cercle se forme ?
   - Comment l'image de droite se modifierait si le trou noir n'avait pas une symétrie sphérique parfaite ?

b) Exprimer la masse du trou noir en kilogrammes (unité SI).

c) Calculer (1) le rayon de Schwarzschild du trou noir, puis (2) sa densité moyenne.

d) À partir du redshift de NCG1232, déterminer la distance entre nous (O) et NCG1232 (S). En déduire la distance entre O et le trou noir et celle entre le trou noir et S. *Exprimer toutes ces distances en* Mpc *puis en* m.

e) Calculer le rayon d'Einstein dans l'image de droite. *Donner le résultat en secondes d'arc.*

Exercice 8: Température

a) Quelle est la température du trou noir de Sgr A*, dans le noyau de la Voie Lactée?

b) En tenant compte de la température moyenne de l'univers actuel, pourquoi ce trou noir ne peut pas émettre de la radiation de Hawking ?

c) Quelle devrait être la masse d'un trou noir pour que sa température soit comparable avec celle de l'univers actuel ? Et son rayon de Schwarzschild ?

Exercice 9 : Temps d'évaporation

Lorsqu'on se limite uniquement à la physique newtonienne, un trou noir est un objet qui attire toujours de l'énergie et qui n'en libère aucune. Nous avons l'impression que toute information physique contenue dans ce qu'il avale est « perdue », sauf trois grandeurs physiques (indépendantes) qui définissent univoquement cet objet.

a) Quelles sont ces trois grandeurs ?

b) Expliquer quel est le phénomène à la base de l'évaporation d'un trou noir et pourquoi la physique newtonienne n'est pas suffisante pour l'expliquer.

c) Déterminer l'ordre de grandeur du temps d'évaporation d'un trou noir de (I) $M_{in} \sim 1\text{kg}$, (II) $M_{in} \sim M_{Terre}$ et (III) $M_{in} \sim 10M_{Soleil}$.

d) Quelle devrait être la masse initiale d'un trou noir pour qu'il s'évapore en une durée de l'ordre de l'âge de l'univers, $t_e \sim 10^{10}$ années?

Exercice 10 : Le trou noir du CERN

Le LHC (large hadrons collider), au CERN, peut accélérer des protons jusqu'à leur faire atteindre une énergie cinétique de $E_k = 13\text{TeV}$.

a) Convertir cette énergie en Joules ;

b) S'il était possible de convertir entièrement toute cette énergie cinétique en énergie de masse, quelle serait la masse de la particule ainsi créée ?

c) Quels seraient le rayon de Schwartzschild et la densité d'un trou noir de telle masse ?

d) Quelle serait l'estimation du temps d'évaporation d'un tel trou noir ?

Vidéo : le trou noir du CERN : http://www.dailymotion.com/video/x7erd3_le-trou-noir-du-cern_tech