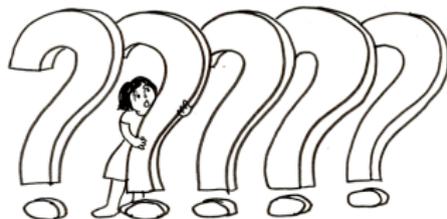


La formule de Riemann-Roch, la conjecture de Kashiwara-Vergne, le dessin industriel,..., et moi



J'ai choisi ici de parler de trois formules :

- La formule de Riemann-Roch Hirzebruch.
- La conjecture de Kashiwara-Vergne.
- La formule d'inversion de Schoenberg, et le dessin industriel.

Dans ces formules, la fonction

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta}$$

joue un grand rôle.

3 formules qui relient Algèbre et Géométrie

La formule de Riemann-Roch-Hirzebruch :

Dann ist unter Verwendung der κ_n -Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned}\chi(V_n, W) &= \kappa_n \left[(e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_n}) \prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}} \right] \\ &= \kappa_n \left[e^{\alpha/2} (e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \dots + e^{\beta_n}) \prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i/2}{\sinh \gamma_i/2} \right] = T(V_n, W). \quad (1)\end{aligned}$$

Conjecture de Kashiwara-Vergne :

$$\begin{aligned}c) \quad & \text{tr}((\text{ad } x)(\partial_x F); \mathfrak{g}) + \text{tr}((\text{ad } y)(\partial_y G); \mathfrak{g}) \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\text{ad } x}{e^{\text{ad } x} - 1} + \frac{\text{ad } y}{e^{\text{ad } y} - 1} - \frac{\text{ad } z}{e^{\text{ad } z} - 1} - 1; \mathfrak{g} \right).\end{aligned}$$

Here $z = \log e^x e^y$ and $\partial_x F$ (resp. $\partial_y G$) is the $\mathbf{End}(\mathfrak{g})$ -valued real analytic function defined by

Formule de Schoenberg pour l'interpolation :

THEOREM 5. Let $(\gamma_{2r}^{(m)})$ be the sequence of rational numbers generated by the expansion

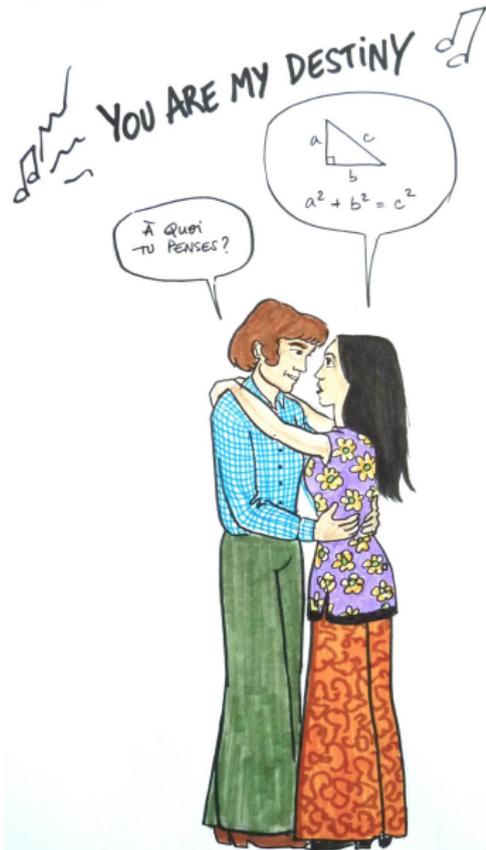
$$\left(\frac{u}{2 \sin(u/2)} \right)^m = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{2r}^{(m)} u^{2r}. \quad (27)$$

If (23) and (24) hold, then the coefficients c_s in (24) may be expressed as

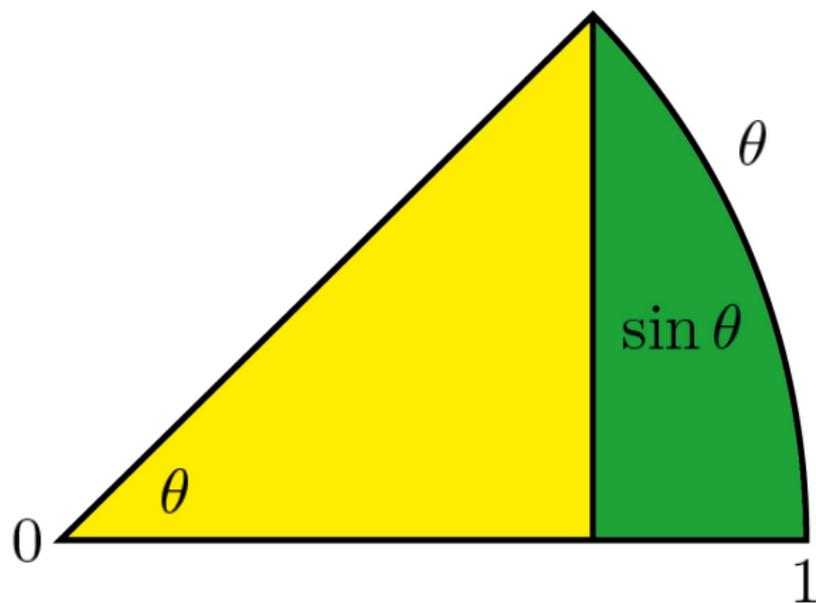
$$c_s = \sum_{r=0}^s (-1)^r \gamma_{2r}^{(m)} S^{(2s-2r)}(v), \quad \text{where } s = [(m-1)/2]. \quad (28)$$

This may be regarded as an analogue for cardinal spline functions of Taylor's formula for polynomials.

A quoi tu penses ?

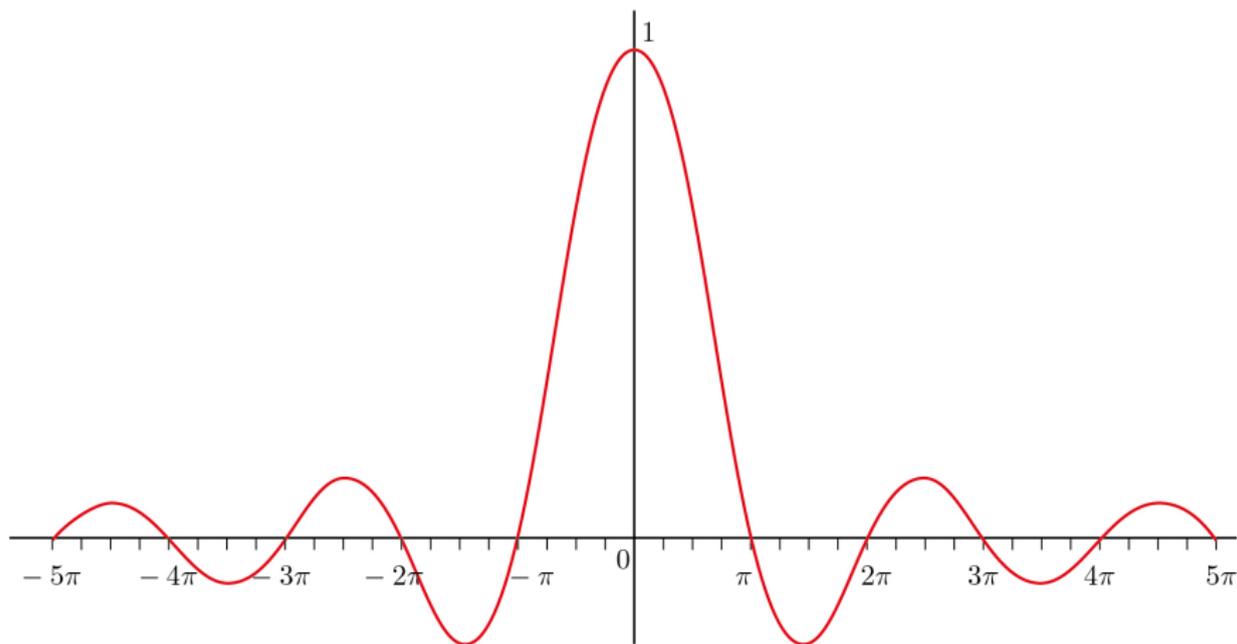


La fonction $\sin(\theta)/\theta = 1 - \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4 + \dots$



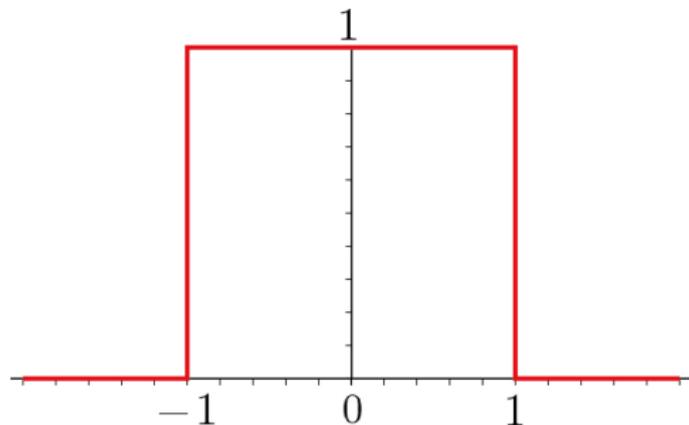
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

La fonction $\sin(\theta)/\theta = 1 - \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4 + \dots$



Et sa transformée de Fourier

$$\frac{\sin(x)}{x} = \int_{-1}^1 e^{ixy} dy / 2$$



Première Partie

La formule de Riemann-Roch-Hirzebruch

Géométrie : variété complexe

Algèbre : anneau de cohomologie=anneau de polynomes tronqués.

La formule de Riemann-Roch-Hirzebruch

La fonction

$$\hat{A}(x) = \frac{x/2}{\sinh(x/2)} = e^{x/2} \frac{x}{1 - e^{-x}}$$

apparaît pour la première fois dans ma vie en 1964 lors du premier séminaire auquel je participe : le séminaire Chevalley sur le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch.



Hirzebruch

De quoi parle le théorème de Riemann-Roch

Soit $k \geq 0$ un entier. Riemann cherchait à décrire l'espace $H^0(C, \mathcal{O}(k))$ des fonctions f méromorphes sur une courbe complexe C (c'est-à-dire une surface réelle) de genre g , partout définies, sauf éventuellement en un point et ayant un pôle d'ordre $\leq k$ en ce point. De combien de constantes arbitraires dépendent-elles ?

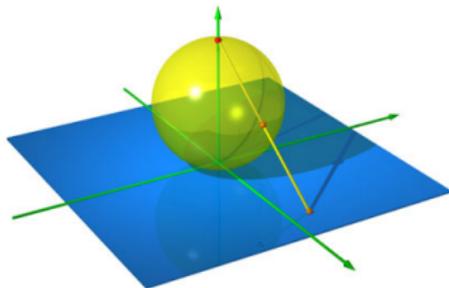


Courbe complexe de genre 2

Exemple : $w^2 = z(z - 1)(z - 2)(z - 3)(z - 4)(z - 5)$

Sphère de Riemann S : Courbe complexe de genre zero

C'est la sphère toute simple. On l'appelle sphère de Riemann, lorsque on pense à la sphère comme une variété complexe, avec une coordonnée z (une seule variable complexe : deux variables réelles x, y).



On identifie S au plan complexe plus un point à l'infini.

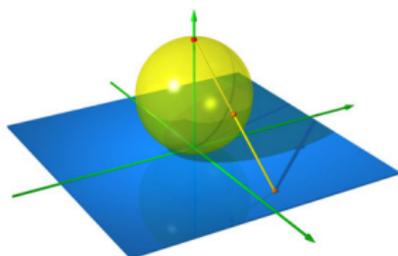
Sphère de Riemann S : classe fondamentale

On choisit c telle que

$$\int_S c = 1.$$

En coordonnées $z = x + iy$,

$$c = \frac{1}{\pi} \frac{dx \wedge dy}{(1 + (x^2 + y^2))^2}.$$



Une coordonnée complexe z

14. *B. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen.*

123

sind; es muß also, wenn die Verzweigungswerthe der Fläche T nicht beson-

Riemann (1857) : C courbe de genre g

$$\dim H^0(C, \mathcal{O}(k)) \geq k + 1 - g.$$

Roch (1865) trouve la correction à faire.

Sind s_1, s_2, \dots, s_n die n Werthe der Function s für dasselbe x , und bezeichnet σ eine beliebige Größe, so ist $(\sigma - s_1)(\sigma - s_2) \dots (\sigma - s_n)$ eine einwerthige Function von x , die nur für einen Punkt der x -Ebene, der mit einem Punkte ε zusammenfällt, unendlich wird und unendlich von einer so hohen Ordnung, als Punkte ε auf ihn fallen. In der That wird für jeden auf ihn fallenden Punkt ε , der kein Verzweigungspunkt ist, nur *ein* Factor dieses

Exemple (avec égalité) : la sphère de Riemann S

$H^0(S, \mathcal{O}(k)) =$ Fonctions $f(z)$ sur le plan complexe, bornées à l'infini, et ayant en $z = 0$ un pôle d'ordre $\leq k$.

$$H^0(S, \mathcal{O}(k)) = \left\{ 1, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}, \dots, \frac{1}{z^k} \right\}.$$

$$\dim H^0(S, \mathcal{O}(k)) = k + 1$$

En coordonnées homogènes $z = z_1/z_2$,

$$H^0(S, \mathcal{O}(k)) = z_1^{-k} (\mathbb{C}z_1^k \oplus \mathbb{C}z_1^{k-1}z_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}z_2^k)$$

= espace des polynômes en deux variables z_1, z_2 homogènes de degré k .

Neue Topologische Methoden. Hirzebruch 1953

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK UND IHRER GRENZGEBIETE

UNTER MITWIRKUNG DER SCHRIFTFLEITUNG DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“

HERAUSGEGEBEN VON

L.V. AHLFORS · R. BAER · R. COURANT · J. L. DOOB · S. EILENBERG
P. R. HALMOS · T. NAKAYAMA · H. RADEMACHER
F. K. SCHMIDT · B. SEGRE · E. SPERNER

NEUE FOLGE · HEFT 9

NEUE TOPOLOGISCHE METHODEN IN DER ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE

VON

F. HIRZEBRUCH



Aucun progrès notable pendant 100 ans.

Progrès fulgurants au cours de l'année 1953

Une formule extraordinaire à deviner... et à prouver

V_n variété compacte complexe de dimension complexe n , $W \rightarrow V_n$ un fibré vectoriel holomorphe,

$$\begin{aligned}\chi(V_n, W) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(V_n, \mathcal{O}(W)) \\ &= \int_{V_n} \text{Chern}(W) \text{Todd}(M).\end{aligned}$$

La formule de Riemann-Roch-Hirzebruch, telle que la formule Hirzebruch

Dann ist unter Verwendung der κ_n -Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned}\chi(V_n, W) &= \kappa_n \left[(e^{\delta_1} + e^{\delta_2} + \cdots + e^{\delta_q}) \prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{1 - e^{-\gamma_i}} \right] \\ &= \kappa_n \left[e^{c_1/2} (e^{\delta_1} + e^{\delta_2} + \cdots + e^{\delta_q}) \prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i/2}{\sinh \gamma_i/2} \right] = T(V_n, W)\end{aligned}$$

Back to : la sphère de Riemann S

La classe fondamentale est c : on calcule dans l'anneau de cohomologie $\mathbb{R}[c]/c^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}c$.

La classe de Todd $\text{Todd}(S)$ du fibré tangent est $\left(\frac{c}{1-e^{-c}}\right)^2 \equiv 1 + c$.

Le caractère de Chern du fibré $\mathcal{O}(k)$ est $e^{kc} \equiv 1 + kc$.

$H^1(S, \mathcal{O}(k)) = 0$.

$$\begin{aligned} \dim H^0(S, \mathcal{O}(k)) - \dim H^1(S, \mathcal{O}(k)) &= \int_S e^{kc} \left(\frac{c}{1-e^{-c}}\right)^2 \\ &= \int_S (1 + kc)(1 + c) = \int_S 1 + (k+1)c = k + 1. \end{aligned}$$

Il est clair qu'on ne peut deviner la formule de Riemann-Roch sur cet exemple

L'étude de $P_n(\mathbb{C})$ détermine la formule

L'espace $H^0(P_n(\mathbb{C}), \mathcal{O}(k))$ est l'espace des fonctions polynomiales en $(n+1)$ variables et homogènes de degré k :

$$\dim = \dim H^0(P_n(\mathbb{C}), \mathcal{O}(k)) = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n)}{n!}.$$

Les autres espaces de cohomologie sont nuls.

Si la formule de Riemann-Roch-Hirzebruch est vraie, \dim doit être le coefficient en x^n dans $e^{kx} \left(\frac{x}{(1-e^{-x})} \right)^{n+1}$. En effet, si $c \in H^2(P_n(\mathbb{C}))$ est telle que $\int_{P_n(\mathbb{C})} c^n = 1$, on doit avoir

$$\dim = \int_{P_n(\mathbb{C})} e^{kc} \left(\frac{c}{1-e^{-c}} \right)^{n+1}$$

et on calcule modulo $c^{n+1} = 0$.

Mon directeur de thèse, Chevalley, et moi



Il me dit

Si vous voulez faire des mathématiques, alors il faut que ce soit la chose qui passe avant tout.

Il neige à l'IHES

Il me dit aussi ” **Grothendieck a trouvé une démonstration évidente et beaucoup plus générale du théorème de Riemann-Roch. Allez au séminaire Grothendieck**”



L'inaccessible paradis des mathématiques



1965 : Moi à gauche, derrière le mur, au séminaire Grothendieck.

Je déteste les diagrammes commutatifs

La démonstration de Grothendieck du théorème de Riemann-Roch :
un diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccc} K^*(X) & \longrightarrow & K^*(X^{\text{top}}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K^*(Y) & \longrightarrow & K^*(Y^{\text{top}}) \end{array} \quad \begin{array}{c} f^{\text{top}} \\ \star \end{array}$$

Est-ce que je veux faire des mathématiques ?

Je pars en Inde.



(je reviendrais dans un an)



vont jouer un role fondamental dans mes recherches :

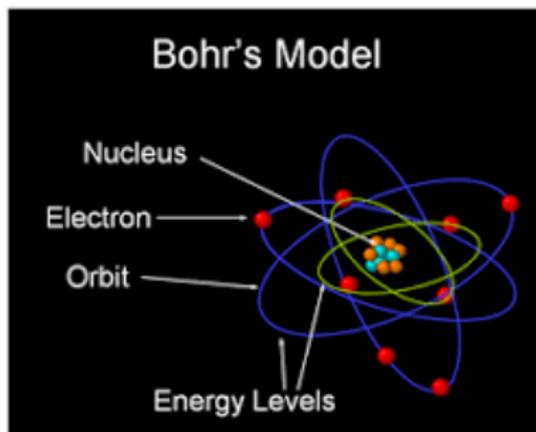
Deuxième Partie

La formule de Campbell-Hausdorff et la conjecture de Kashiwara-Vergne

Géométrie : un espace "classique" avec un groupe G de symétrie
Algèbre : un espace quantique : représentations du groupe G .

La mécanique quantique

Une rencontre décisive à mon retour, Monique Levy-Nahas, elle m'explique le principe d'incertitude de Heisenberg, le modèle de Niels Bohr de l'atome d'hydrogène, les représentations des groupes.



Les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont discrets.

Si M est une variété de Poisson, on considère son algèbre de fonctions \mathcal{F} . C'est une algèbre commutative de fonctions.

On pense (démontré en 1997 par Kontsevich) qu'il existe une algèbre non commutative qui déforme cette algèbre de fonctions. Les fonctions doivent être remplacées par des opérateurs (ou des matrices). Les valeurs d'une fonction sont des nombres réels. Si la fonction engendre un flot périodique, l'opérateur correspondant doit avoir des valeurs propres entières : niveaux d'énergie discrets.

Le plus célèbre exemple : les relations d'incertitude

$$PQ - QP = I$$

$\mathcal{F} = \mathbb{C}(q, p)$ moment et position d'une particule. Fonctions sur \mathbb{R}^2 .
 $\mathcal{F}^{deformed} = \mathbb{C}(P, Q)$ avec $PQ - QP = 1$.

Une représentation de cette algèbre :

$$\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx} = I$$

Dans le cas d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , deux algèbres :

- 1) L'algèbre des polynômes sur \mathfrak{g}^*
- 2) Une algèbre de polynômes non commutatifs.

Exemple : Algèbre de Lie du groupe $SO(3, \mathbb{R})$.

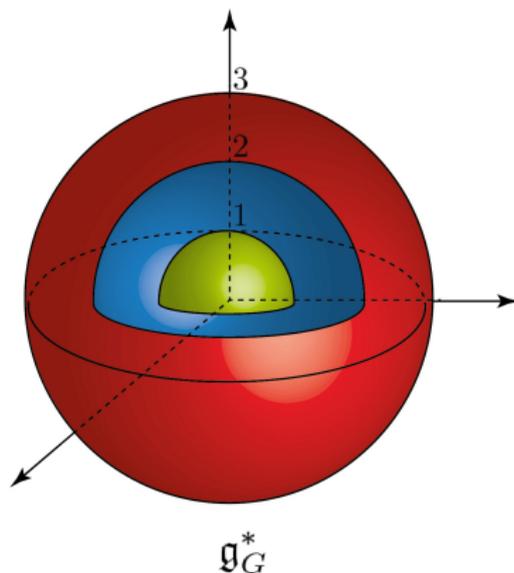
$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, X_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$X_1 X_2 - X_2 X_1 = X_3, \quad X_2 X_3 - X_3 X_2 = X_1, \quad X_3 X_1 - X_1 X_3 = X_2.$$

- \mathcal{F} algèbre des polynômes en 3 variables (x_1, x_2, x_3) .
- $\mathcal{F}^{deformed}$ algèbre des polynômes en 3 variables non commutatives (X_1, X_2, X_3) (avec $X_1 X_2 - X_2 X_1 = X_3, X_2 X_3 - X_3 X_2 = X_1, X_3 X_1 - X_1 X_3 = X_2$.)

Représentations irréductibles du groupe $SO(3, \mathbb{R})$



Les représentations irréductibles sont paramétrées par les sphères de rayon entier

$$S_k = \{(x_1, x_2, x_3); x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = k^2\}$$

Retour à la sphère de Riemann : Représentations du groupe $SO(3, \mathbb{R})$

. Soit $S = P_1(\mathbb{C})$ la sphère de Riemann. Le groupe $SL(2, \mathbb{C})$ est le groupe de toutes les transformations holomorphes. On peut faire agir un élément

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

du groupe $GL(2, \mathbb{C})$ par transformations homographiques $z \mapsto \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$.
Application correspondante sur $H^0(P_1(\mathbb{C}), O(k))$.

$$g * f(z_1, z_2) = f(a_{11}z_1 + a_{12}z_2, a_{21}z_1 + a_{22}z_2).$$

Soit

$$H = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} \quad \exp(H) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Matrice de l'action dans la base $z_1^k, z_1^{k-1}z_2, \dots, z_2^k$ de $H^0(P_1(\mathbb{C}), \mathcal{O}(k))$:

$$\begin{pmatrix} e^{-ik\theta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(k-2)\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i(k-2)\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{ik\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{H^0(P_1(\mathbb{C}), \mathcal{O}(k))}(\exp(H)) &= e^{-ik\theta} + e^{-i(k-2)\theta} + \dots + e^{i(k-2)\theta} + e^{ik\theta} \\ &= \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Pour θ tendant vers 0, tend vers $k+1$.

Mieux que Riemann-Roch : Formule de Riemann-Roch équivariante

Soit $S_{k+1} = \{y = (y_1, y_2, y_3); y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = (k+1)^2\}$ la sphère de Riemann, mais de rayon $k+1$. On obtient alors, si

$$X = \begin{pmatrix} ix_1 & x_2 + ix_3 \\ -x_2 + ix_3 & -ix_1 \end{pmatrix}, \quad \langle y, X \rangle = y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3,$$

$$(k+1) \operatorname{Tr}_{H^0(P_1(\mathbb{C}), \mathcal{O}(k))}(\exp(X)) = \frac{1}{4\pi} \int_{y \in S_{k+1}} e^{i\langle Y, X \rangle} \frac{\|X\|}{\sin(\|X\|)} dm(y),$$

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

C'est la formule des caractères de Kirillov.

On "voit" le caractère de Chern $e^{i\langle Y, X \rangle}$ et la classe $\hat{A} = \frac{\|X\|}{\sin(\|X\|)}$.

1977 : Le théorème de Duflo pour un groupe de Lie quelconque

1.3. On note $S(X)$ la série formelle $S(X) = \text{sh}(1/2 X)/1/2 X$ et $S'(X)$ la série formelle $S'(X) = (1 - e^{-X})/X$. Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur k . Pour $X \in \mathfrak{g}$ on pose $j(X) = (\det S(\text{ad } X))^{1/2}$.

Si $k = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , j est une fonction analytique au voisinage de 0 dans \mathfrak{g} ; dans le cas général j est une série formelle. On note d_j l'opérateur différentiel (d'ordre infini en général) sur $S(\mathfrak{g})$ défini par j .

Si $u \in U(\mathfrak{g})$, on pose $a(u) = d_j^{-1}(\beta^{-1}(u))$. (Pour tout ceci, voir [5] p. 55.) L'application a induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $Z(\mathfrak{g})$ sur $I(\mathfrak{g})$.

Duflo écrit sous son théorème : Il devrait y avoir une démonstration algébrique de ce théorème, mais je n'en connais pas

Exemple $SO(3, \mathbb{R})$

On considère l'algèbre $\mathcal{F}^{deformed}$ des polynômes non commutatifs en X_1, X_2, X_3 ($X_1 X_2 - X_2 X_1 = X_3$, $X_2 X_3 - X_3 X_2 = X_1$, $X_3 X_1 - X_1 X_3 = X_2$.)
Alors : la formule de Duflo dit que dans cette algèbre de polynômes non commutatifs :

$$\frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} \int_{y \in \mathbb{R}^3} e^{-((y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)/2t)} e^{y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3} \frac{sh(\|Y\|/2)}{\|Y\|/2} dy_1 dy_2 dy_3 \\ = e^{t((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)/2 - 1/4)}.$$

Démonstration "directe" par Martin Anderegg (Mémoire Genève 2005).
Le problème :

$$e^{y_1 X_1 + y_2 X_2 + y_3 X_3} \neq e^{y_1 X_1} e^{y_2 X_2} e^{y_3 X_3}$$

La conjecture de Kashiwara-Vergne :1978

Avec Kashiwara, nous proposons une conjecture algébrique sur $e^X e^Y$ qui entraîne en particulier le théorème de Duflo. Démontrée par Alekseev-Torossian-Meinrenken (2005).

Conjecture. For any Lie algebra \mathfrak{g} of finite dimension, we can find F and G such that they satisfy

a) $x + y - \log e^y e^x = (1 - e^{-\text{ad}x})F + (e^{\text{ad}y} - 1)G.$

b) F and G give \mathfrak{g} -valued convergent power series on $(x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}.$

c) $\text{tr}((\text{ad}x)(\partial_x F); \mathfrak{g}) + \text{tr}((\text{ad}y)(\partial_y G); \mathfrak{g})$

$$= \frac{1}{2} \text{tr} \left(\frac{\text{ad}x}{e^{\text{ad}x} - 1} + \frac{\text{ad}y}{e^{\text{ad}y} - 1} - \frac{\text{ad}z}{e^{\text{ad}z} - 1} - \text{id}; \mathfrak{g} \right).$$

Here $z = \log e^x e^y$ and $\partial_x F$ (resp. $\partial_y G$) is the $\text{End}(\mathfrak{g})$ -valued real analytic function defined by

$$\mathfrak{g} \ni a \mapsto \frac{d}{dt} F(x + ta, y)|_{t=0} \quad \left(\text{resp. } \mathfrak{g} \ni a \mapsto \frac{d}{dt} G(x, y + ta)|_{t=0} \right),$$

and tr denotes the trace of an endomorphism of $\mathfrak{g}.$

Longtemps après : cette conjecture est-elle triviale ??

$$\text{Log}(e^X e^Y) = X + Y + ??$$



Troisième Partie

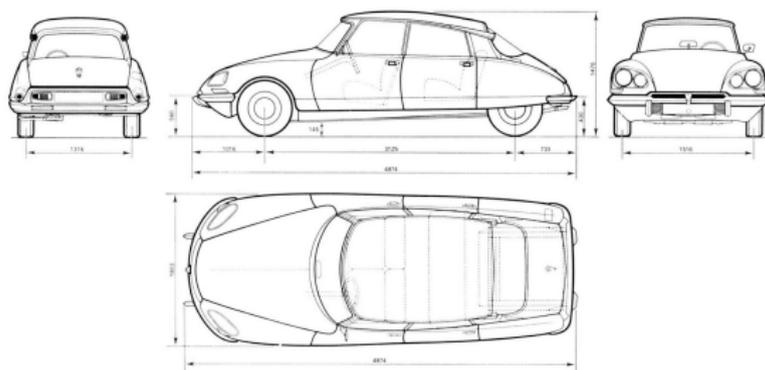
Fonctions polynomiales par morceaux

Géométrie : un dessin

Algèbre : une suite de nombres pour faire faire ce dessin par un ordinateur.

Formule de Riemann-Roch pour les splines et dessin industriel

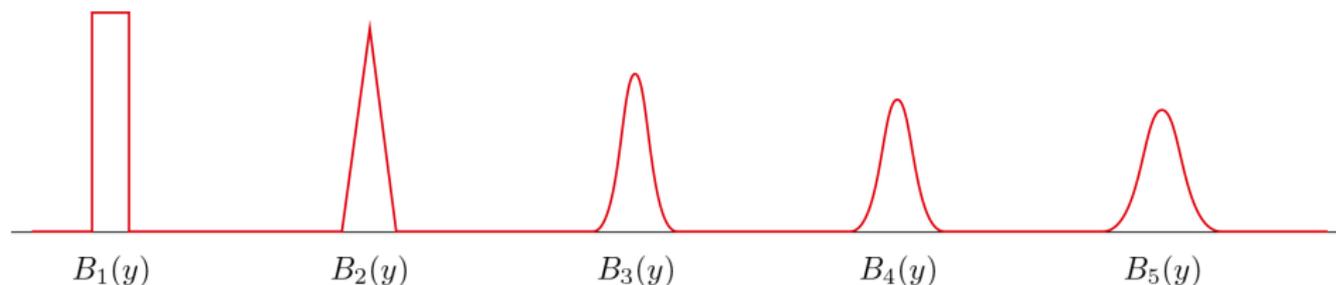
Une fonction spline : une fonction faite de morceaux polynomiaux qui se raccordent . Importantes dans la modélisation des carrosseries de voiture, la typographie, etc...



Les transformées de Fourier $B_k(y)$ des fonctions $(\sin(x/2)/x/2)^k$

Fonctions $B_k(y)$ telles que

$$(\sin(x/2)/x/2)^k = \int_{-\infty}^{\infty} B_k(y) e^{ixy} dy$$



Ce sont les fonctions employées pour faire des dessins.

Formule de Schoenberg

La fonction $B_k(y)$ est de classe C^{k-1} .

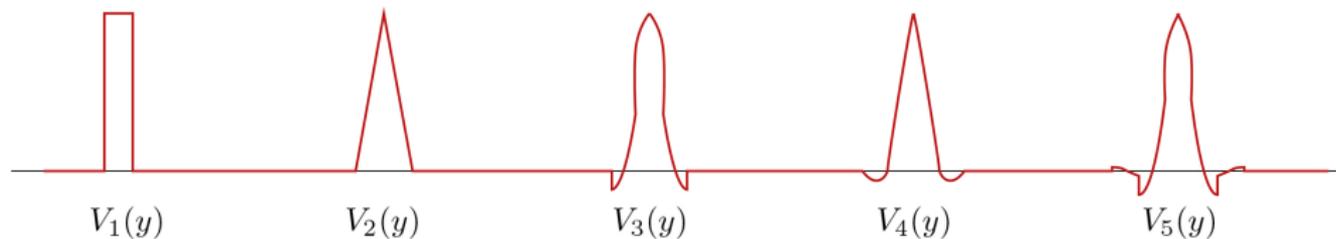
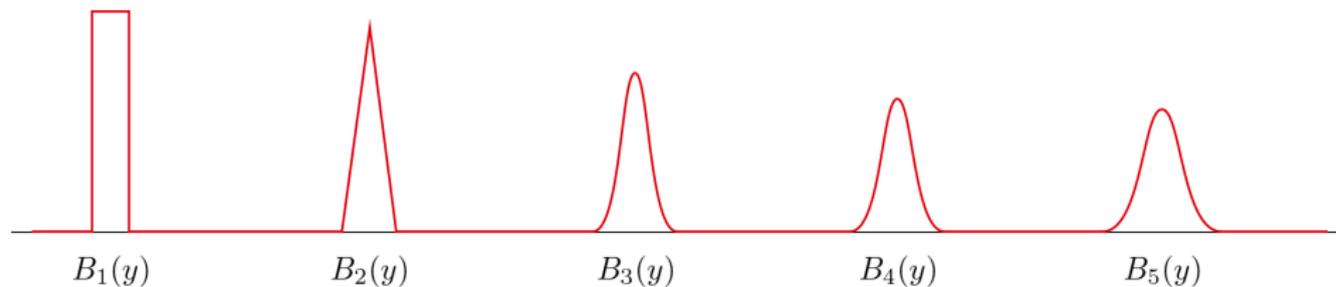
Soit $d = \frac{d}{dy}$.

La fonction

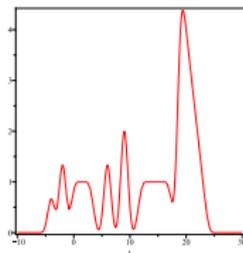
$$\left(\frac{d/2}{\sinh(d/2)} \right)^k \cdot B_k$$

s'annule sur tous les entiers λ sauf en $\lambda = 0$, où elle vaut 1

Les fonctions $B_k(y)$ et leurs dérivées par l'opérateur de Todd



Théorème de reconstruction



Si $f(y) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} B_k(y - \lambda)$, alors $c_{\lambda} = \left(\frac{d/2}{\sinh(d/2)} \right)^k f(\lambda)$.

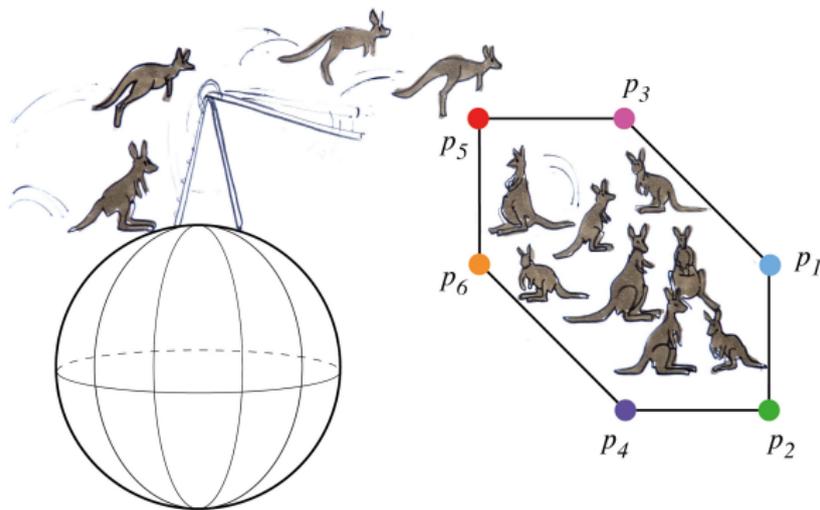
f plus haut est obtenue à partir de B_4 par la combinaison des multiples des translatées :

[1, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 2, 0, 3, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 4, 3, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 1].

Dernière partie

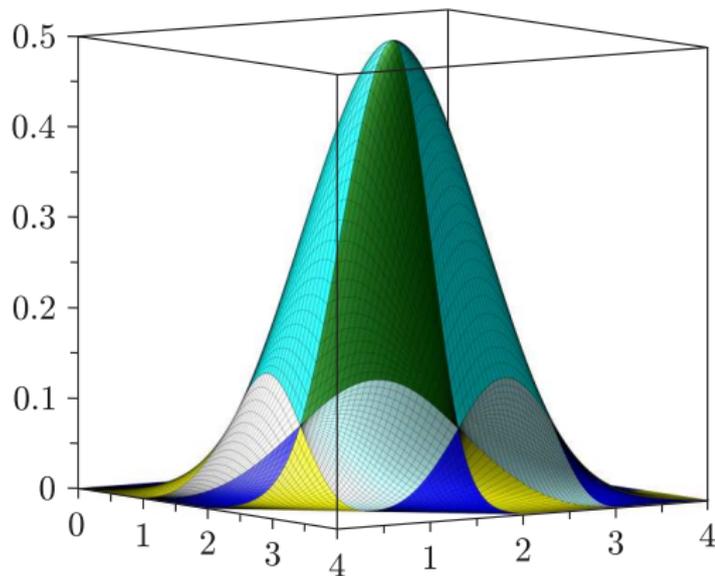
Le théorème de Riemann-Roch, la mécanique quantique, et le dessin industriel.

M variété symplectique compacte avec $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si F est une application moment pour un tore, alors la mesure image $DH(F)$ est localement polynomiale et supportée sur un polytope convexe. C'est la mesure de Duistermaat-Heckman.



Exemple : M une variété de dimension réelle 12,
 $F : M \rightarrow \mathbb{R}^2$

Une fonction multispine de degré 4 en deux variables :



$DH(y_1, y_2) :=$ Mesure de Duistermaat-Heckmann

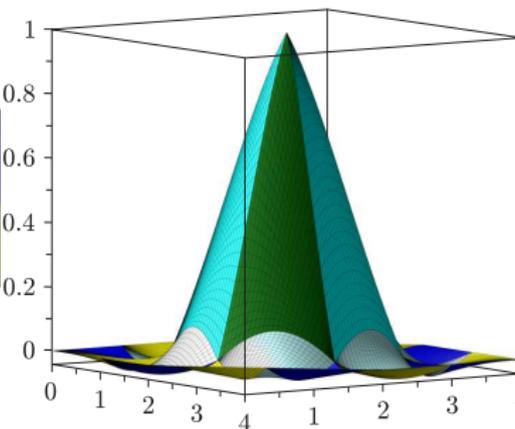
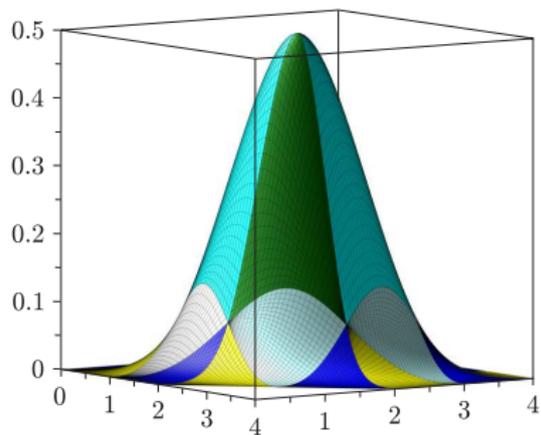
Quantization et reconstruction

Construire $Q(M)$ une mesure sur un réseau qui prend des valeurs entières sur le réseau et ressemble à la mesure de Duistermaat-Heckman.

Théorème (Transformée de Fourier du théorème de Riemann-Roch équivariant) : $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, application moment. Il existe un opérateur différentiel canonique $\hat{A}(\partial)$ tel que $\hat{A}(\partial)DH$ prenne des valeurs entières sur \mathbb{Z}^n

Transformée de Fourier du théorème de Riemann-Roch équivariant

Exemple :



Sous les questions, des questions



Merci à tous mes collaborateurs

Nicole Berline, Michel Duflo, Masaki Kashiwara, Shrawan Kumar, Michel Brion, Ezra Getzler, Welleda Baldoni, Andras Szenes, Jesus De Loera, Matthias Koeppel, Paul-Emile Paradan, Corrado De Concini, Claudio Procesi, Michael Walter,...



Merci à MC Vergne, et Marion Boulestreau pour les dessins.