

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

---

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
  - Série 2 : Expansion
  - Série 3 : Principe d'équivalence
  - Série 4 : Courbure
  - Série 5 : Lentille gravitationnelle
  - Série 6 : Trous noirs
  - Série 7 : Equations cosmologiques
  - Série 8 : Chronologie du Big Bang
  - Série 9 : Ondes Gravitationnelles
- 
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
  - Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

©*Terms of use*

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 1 : Grandeurs***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

# Série 1 : Grandeurs

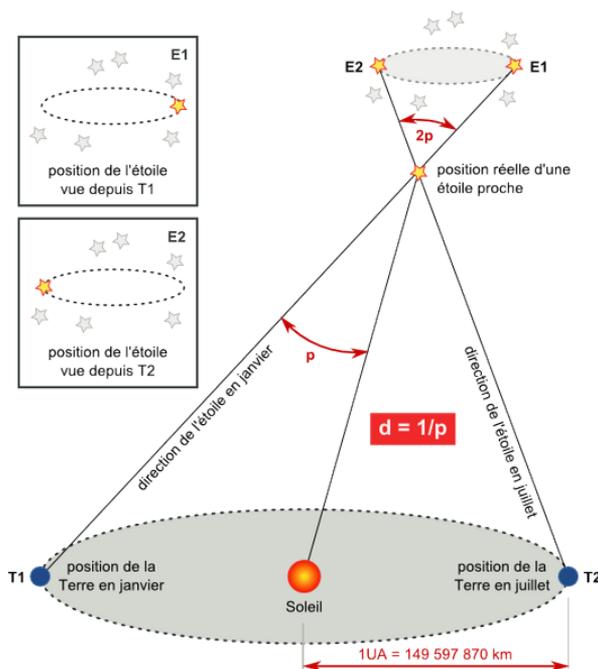
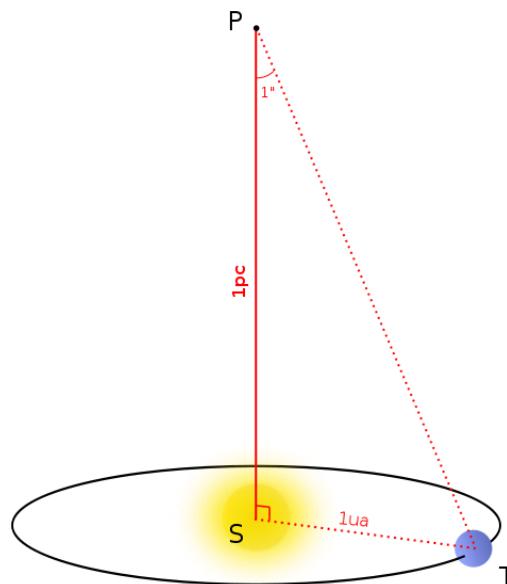
## Exercice 1 : L'année-lumière

- Définir en français ce qu'est une **année lumière (al)**.
- En sachant que la lumière se propage dans le vide avec une vitesse d'intensité  $c = 299792458\text{m/s}$ , exprimer une al en mètres. Donner ce résultat avec un nombre de chiffres significatifs facile à retenir.
- « Regarder loin signifie regarder dans le passé », pourquoi ? En observant de galaxies de plus en plus lointaines, la proportion d'elliptiques augmente. Comment expliquer cela ? Formuler quelques hypothèses.

## Exercice 2 : Le parsec

Le **parsec**, noté **pc**, est l'unité de mesure des distances la plus utilisée en astronomie. Elle se base sur la parallaxe trigonométrique, qui est la méthode la plus ancienne et la plus fiable pour mesurer les distances stellaires. Considérons le triangle rectangle du schéma ci-contre, ayant comme premier côté de l'angle droit l'**unité astronomique**, notée **UA** (le rayon de l'orbite terrestre autour du Soleil), opposé à un angle de  $1,00'' (=1^\circ/3600)$ . Le parsec est défini comme le deuxième côté de l'angle droit de ce triangle.

- En sachant que  $1\text{UA} = 1,496 \cdot 10^{11}\text{m}$ , exprimer un parsec en m.



Le dessin ci-contre montre comme la position apparente d'une étoile dans le ciel change à cause de la rotation de la Terre autour du Soleil. L'angle  $p$  s'appelle **parallaxe de l'étoile**.

- Déterminer la formule exprimant la distance  $d$  entre une étoile et le Soleil (en pc) en fonction de sa parallaxe en secondes d'arc :  $d(p)$ .

Attention : plus une étoile est lointaine, plus l'angle de la parallaxe  $p$  est petit. Puisqu'il n'y a pas d'étoile plus proche qu'un parsec,  $p$  est toujours plus petit que  $1^\circ$ , et nous pouvons assumer

- que la distance Terre-étoile correspond à la distance Soleil-étoile,  $d$
- que  $\tan(p) \approx p$ .

c) L'étoile la plus proche, Proxima Centauri, est à 4,23al du Système Solaire : quelle est sa distance en pc ? Et sa parallaxe ?

d) Si l'incertitude sur la mesure de la parallaxe d'une source est de l'ordre de 0,001'', quel est l'ordre de grandeur de la distance maximale que nous pouvons estimer avec cette méthode ? À quoi cet ordre de grandeur correspond-il?

e) Connais tu des méthodes pour déterminer les distances des objets plus lointains ?

Vidéo ODG distances :

<http://apod.nasa.gov/apod/ap150324.html>



Source : <http://apod.nasa.gov/apod/ap160118.html>

Proxima Centauri est une petite étoile rouge, visible uniquement avec un télescope. Elle fait partie du système d'étoiles « Alpha Centauri », visible depuis l'hémisphère sud, dont l'étoile plus brillante est semblable au Soleil.

### Exercice 3 : Densités lumineuses moyennes

a) En utilisant la table CRM, calculer la masse volumique moyenne du Soleil, de la Terre puis du Système Solaire (en notation scientifique, en unités SI, avec un nombre pertinent de chiffres significatifs).

b) Les études sur les étoiles proches montrent que l'ensemble des étoiles visibles a en moyenne un rapport masse/luminosité cinq fois plus grand que le Soleil :

<http://roffet.com/documents/sciences/mise-en-evidence-de-la-masse-cachee/i/>

$$\frac{M_{lum}}{M_S} = 5 \cdot \frac{L_{lum}}{L_S},$$



où  $M_S$  et  $L_S$  représentent respectivement la masse et la luminosité du Soleil. La luminosité de la Galaxie est  $L_{Gal} \approx 2 \cdot 10^{11} L_S$ , et son rayon, en tenant compte uniquement de la matière lumineuse, est d'environ 15kpc. Estimer la masse lumineuse de la Voie Lactée,  $M_{lum Gal}$ , puis sa la masse volumique lumineuse moyenne,  $\rho_{lum Gal}$  (résultats en notation scientifique, en unités SI, avec un nombre pertinent de chiffres significatifs).

c) Nous comptons en moyenne 5 galaxies pour chaque portion cubique d'Univers de 10Mpc d'arrête. En supposant que la masse lumineuse de la Voie Lactée soit représentative de la moyenne des masses lumineuses de toutes les galaxies, en déduire la masse volumique lumineuse moyenne de l'Univers. Exprimer ce résultat en  $M_S/\text{Mpc}^3$  et en  $\text{kg}/\text{m}^3$ , en notation scientifique. Quel est son ODG ? Ce résultat est-il en accord avec la valeur donnée dans la théorie ?

d) Convertir cette densité en nombre d'atomes d'hydrogène par mètre cube.

## Exercice 4 : Probabilité de collision

L'image ci-contre a été créée à partir des données d'une simulation de la NASA, indiquant que la Voie Lactée et Andromède sont en train de se rapprocher pour collisionner dans environ quatre milliards d'années. Celle-ci est une reconstruction de comme le ciel pourrait nous apparaître depuis la Terre en ce moment.



Crédit : NASA - [http://www.nasa.gov/mission\\_pages/hubble/science/milky-way-collide.html](http://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/science/milky-way-collide.html).

Vidéo de la simulation de la collision entre la Voie Lactée et Andromède :

<https://www.youtube.com/watch?v=2I8PVoYY4mU>



Nous pouvons considérer le disque lumineux d'Andromède comme une surface circulaire de rayon  $R \approx 30\text{kpc}$ , contenant environ 400 milliards d'étoiles. Assumer le rayon moyen des étoiles dix fois celui du Soleil :  $r \approx 10R_S$ .

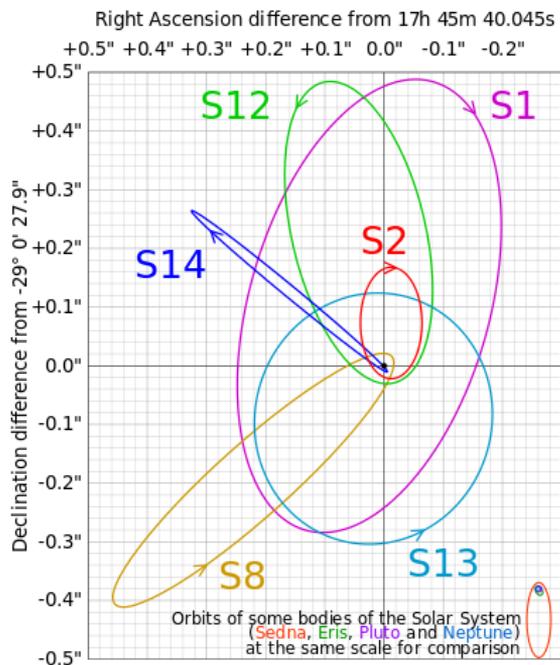
- Expliquer pourquoi les collisions entre les galaxies sont assez fréquentes, alors que celles entre les étoiles de deux galaxies en collision sont rares.
- Estimer le pourcentage de surface occupée par les étoiles d'Andromède par rapport à la surface totale occupée par le disque galactique. Ce pourcentage correspond à la probabilité qu'une étoile de la Voie Lactée (par exemple le Soleil) collisionne avec une étoile d'Andromède lors de la collision entre ces deux galaxies.
- Quel est l'ordre de grandeur du nombre total de collisions d'étoiles lors de la collision entre Andromède et la Voie Lactée?

## Exercice 5 : L'orbite de S2

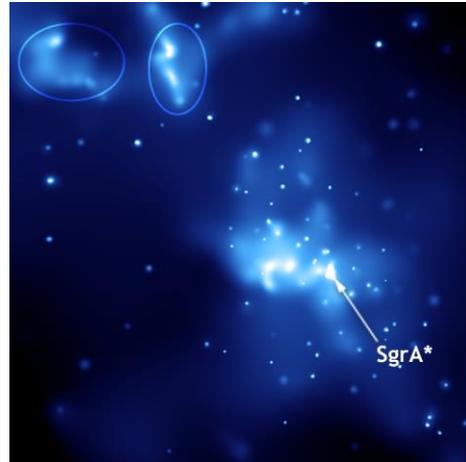
La figure ci contre montre une image de Sagittarius A\* (Sgr A\*), la source radio compacte dans le centre de la Voie Lactée. Elle a été prise avec un télescope à rayons X de la NASA. Les images dans les ellipses sont des échos.

À partir de l'étude du mouvement de certaines étoiles autour de cette source, les astronomes ont pu déduire la présence d'un trou noir supermassif à cet endroit, comme c'est le cas dans toutes les grandes galaxies à spirale.

L'image suivante reproduit les orbites de six étoiles autour de Sgr A\*. À titre comparatif certaines orbites de planètes du Système Solaire sont aussi représentées.



Crédit : By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=15252541>



Crédit : NASA, Wikipedia

L'étoile S2, dont nous avons pu suivre une révolution complète depuis 1995 jusqu'en 2010, possède un périhélie (la distance minimale à Sgr A\* dans son orbite) de 120 UA et une période de 15 ans. Pour simplifier, nous considérons l'orbite de S2 comme un cercle de rayon  $r = 1200$  UA (dix fois plus grand que son périhélie).

- Avec cette approximation, estimer la vitesse scalaire moyenne de S2 sur une période. Donner le résultat en unités SI.
- En utilisant les données sur la table CRM, calculer la distance parcourue par Neptune lors d'une révolution complète autour du Soleil.
- Comparer les longueurs des orbites de S2 et de Neptune en calculant leur rapport.

- Calculer la vitesse scalaire moyenne de Neptune sur une révolution autour du Soleil.
- Comparer les vitesses scalaires moyennes de S2 et de Neptune en calculant leur rapport.

## Exercice 6 : Comparaison des interactions gravitationnelle et électrique

### Partie 1 :

L'électron dans l'atome d'hydrogène, selon le modèle de Bohr, tourne autour du proton sur une orbite de rayon  $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$  m.

- Calculer l'intensité de la force d'attraction gravitationnelle électron – proton. Puis, dans le même atome, calculer l'intensité de la force d'attraction électrique électron – proton. *Vous pouvez trouver les valeurs des charges et des masses de ces particules, ainsi que les constantes  $G$  (constante de gravitation universelle) et  $k$  (constante de Coulomb) dans la table CRM.*
- Quel est le rapport entre les intensités de la force électrique et celle gravitationnelle dans l'atome d'hydrogène? Est-ce que ce rapport change si l'on varie la distance entre les deux particules?

### Partie 2 :

- Estimer le nombre de protons contenus dans la Terre à partir de la masse de la Terre et la masse du nucléon (expliquer pourquoi peut-on négliger la masse des électrons dans ce calcul), et en sachant que les noyaux atomiques possèdent en moyenne la même quantité de protons et de neutrons.
- Quelle serait la charge électrique de la Terre si on lui arrachait tous ses électrons ? Et celle de la Lune ?
- Donner un ODG de l'intensité de la force électrique entre la Terre et la Lune si leur charge était celle du point c). La comparer à celle de la force gravitationnelle.
- Pourquoi à l'échelle astrophysique l'interaction électrique n'est elle pas dominante ?

## Exercice 7 : Masse et énergie

La masse des corps est l'une des nombreuses formes d'énergie possibles (mécanique, chimique, radiation, chaleur). Pour trouver la quantité d'énergie  $E$  présente sous la forme d'une certaine masse à repos  $m$ , la Relativité Restreinte nous donne la célèbre formule

$$E = m \cdot c^2.$$

Calculer quelle est l'énergie de masse d'un élève de 50kg. La comparer à son énergie cinétique lorsqu'il voyage dans un avion à la vitesse de 1000km/h.

## Exercice 8 : Le boson de Higgs

L'équivalence entre la matière et l'énergie nous permet de créer de la masse à partir de l'énergie cinétique des particules. Au CERN, le Large Hadrons Collider (LHC) accélère des protons puis les fait rentrer en collision, afin d'en transformer l'énergie cinétique en énergie de masse. Cela nous permet de produire, pendant des brefs instants, des particules jamais observées à cause de leur durée de vie très courte. Ces particules ont toutefois existé dans l'Univers primordial, lorsque il était plus condensé et donc plus énergétique.

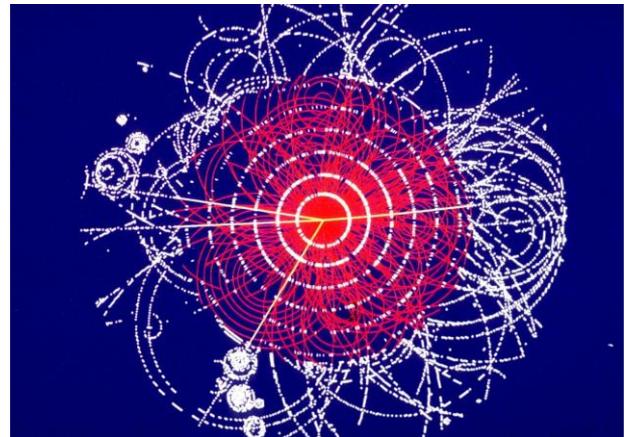
Parmi elles, le boson de Higgs est une particule qui explique, entre autre, quelle est l'origine de la masse de toutes les particules connues:

[http://www.nytimes.com/interactive/2013/10/08/science/the-higgs-boson.html?\\_r=1&#/?g=true](http://www.nytimes.com/interactive/2013/10/08/science/the-higgs-boson.html?_r=1&#/?g=true)



On l'a observée pour la première fois au CERN, le 14 mars 2013 (le jour de l'anniversaire d'Einstein, il aurait eu 134 ans !), après de dizaines d'années de recherche : son existence avait été prédite par Peter Higgs en 1964.

L'image ci-contre montre le résultat de la collision entre deux protons qui ont produit un Higgs se désintégrant en 4 muons (traces jaunes).



Source : <http://home.web.cern.ch/images>

Sa masse est environ  $m_H \approx 2 \cdot 10^{-25}$  kg.

a) Quelle est l'énergie de masse à repos du boson de Higgs ?

b) Si on veut produire un Higgs à repos à partir de la collision entre deux protons, quelle doit être l'énergie minimale que chaque proton doit fournir ?

Nous souhaitons maintenant déterminer quelle est la vitesse du proton correspondant à l'énergie cinétique calculée au point b). Puisque la vitesse des protons approche celle de la lumière,  $v \sim c$ , nous ne pouvons pas utiliser la mécanique newtonienne et donc, pour exprimer l'énergie totale du proton, nous ne pouvons pas utiliser la formule

$$E_{tot} = E_m + E_k = m_p c^2 + \frac{1}{2} m_p v^2. \quad (1)$$

En effet la formule (1) est valable uniquement si  $v \ll c$ . La Relativité nous donne la formule correcte de l'énergie totale (de masse plus cinétique) d'une particule en mouvement avec vitesse  $v$  :

$$E_{tot} = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

c) Vérifier que, dans le cas limite où  $v \ll c$  ( $\Rightarrow x = v^2/c^2 \ll 1$  est une grandeur ultrapetite), la formule relativiste (2) est égale à celle classique newtonienne (1). Pour cela utiliser que la fonction

$$f(x) = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - x}}, \text{ pour } x \text{ ultrapetit, peut s'approximer } f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x.$$

d) Utiliser la formule relativiste (2) ci-dessus pour calculer la vitesse des protons avant la collision qui produit le Higgs.

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
- Série 2 : Expansion
- Série 3 : Principe d'équivalence
- Série 4 : Courbure
- Série 5 : Lentille gravitationnelle
- Série 6 : Trous noirs
- Série 7 : Equations cosmologiques
- Série 8 : Chronologie du Big Bang
- Série 9 : Ondes Gravitationnelles

- 
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
  - Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

©*Terms of use*

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

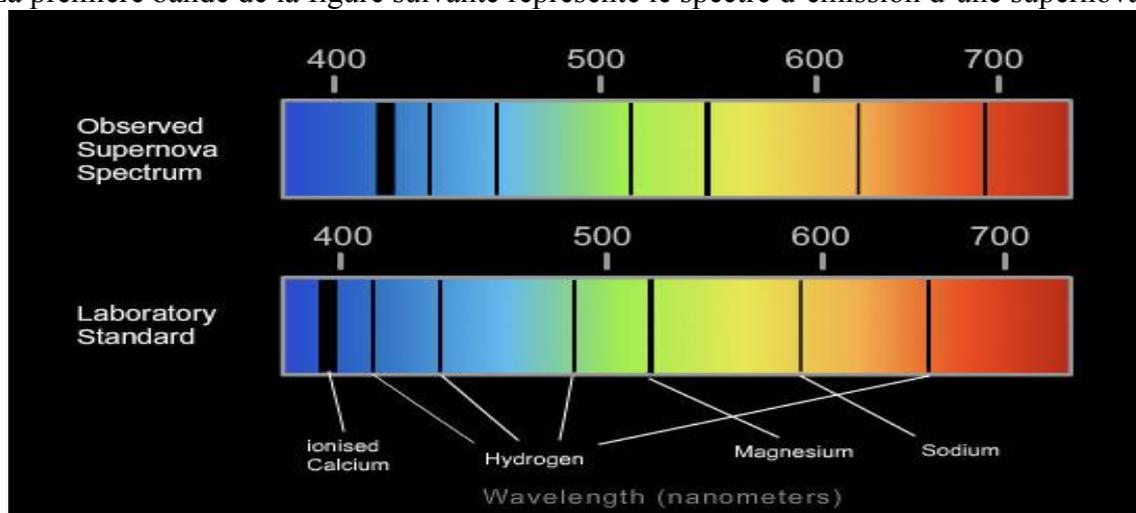
***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 2 : Expansion***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

## Série 2 : Expansion

### Exercice 1 : La supernova

La première bande de la figure suivante représente le spectre d'émission d'une supernova :



Source : <http://www.passmyexams.co.uk/GCSE/physics/the-expanding-universe-red-shift.html>

Les lignes verticales noires représentent des longueurs d'ondes  $\lambda$  que nous ne recevons pas, à cause de l'absorption de celles-ci par des atomes de calcium, d'hydrogène, de magnésium et sodium, dans l'espace interstellaire. Nous connaissons quelles sont ces longueurs dans nos laboratoires (deuxième bande), et elles sont décalées par rapport aux valeurs observés.

- En utilisant l'échelle de la figure ci-dessus, déterminer la différence entre la longueur d'onde observée ( $\lambda_0$ ) et celle émise ( $\lambda$ ) pour la ligne d'absorption du magnésium. En déduire le redshift de la supernova.
- Quelle est la vitesse de récession de cette supernova par rapport à nous ? Donner le résultat en fraction de la vitesse de la lumière,  $c$ , et en unités SI.
- Si nous admettons que ce décalage est dû uniquement à l'expansion de l'Univers, donner une estimation de la distance de la supernova en Mpc en utilisant la loi de Hubble.
- En déduire l'estimation de la durée pendant laquelle la lumière de cette image a voyagé pour nous parvenir.

### Exercice 2 : Le redshift

Considérons une source astronomiquement lointaine qui émet une radiation avec longueur d'onde  $\lambda$ .

- Quel est son redshift si nous observons aujourd'hui cette radiation avec une longueur d'onde double :  $\lambda_0 = 2\lambda$  ?
- Même question, mais si nous observons  $\lambda_0 = 3\lambda$ , puis  $\lambda_0 = 10\lambda$ .
- Quel doit être le redshift d'une source pour qu'une lumière émise dans le vert soit observée dans le rouge ?

### Exercice 3 : La constante de Hubble

Avec un chiffre significatif, nous pouvons dire que la constante de Hubble aujourd'hui est (cf. théorie)

$$H_0 = 7 \cdot 10^4 \frac{\text{m/s}}{\text{Mpc}}$$

a) Convertir cette valeur en  $\frac{\text{nm/année}}{\text{km}}$ . Pouvons nous ressentir cette expansion à notre échelle?

b) Quelle est la vitesse de l'expansion à l'échelle du Système Solaire? Comparer son ordre de grandeur (ODG) avec celui de la vitesse de Pluton autour du Soleil  $v_p = 18000\text{km/h}$ .

c) Quelle est la vitesse de l'expansion à l'échelle de notre galaxie ? Comparer son ODG à celui de la vitesse de rotation du Soleil autour du noyau galactique  $v_{\text{Soleil}} = 220\text{km/s}$ .

d) Quelle est la vitesse de l'expansion à l'échelle de la taille moyenne des groupes de galaxies? La comparer avec la vitesse à laquelle Andromède (image ci-contre) se rapproche de notre galaxie  $v_A = 111\text{km/s}$ .



Crédit : Nicolas Outters

### Exercice 4 : Univers jumeaux

Lire la BD « Cosmic Story » :

[http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/cosmic\\_story.htm](http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/cosmic_story.htm)



À la lumière de vos connaissances sur le Big Bang, quel est le problème dans le modèle d' « Univers à deux pôles » (p. 57 à 60 de la BD) ?



## Exercice 5 : Redshift du fond diffus cosmologique (CMB)

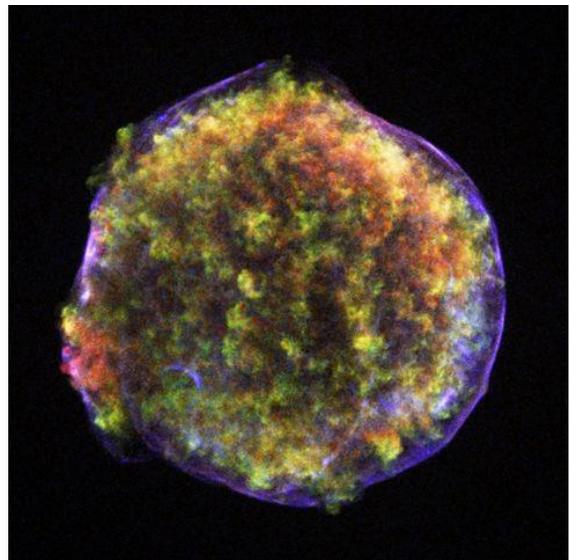
- a) En sachant que l'Univers au découplage avait une température  $T = 3000^\circ\text{K}$ , déterminer la longueur d'onde du pic de spectre d'émission  $\lambda_{max}$  du CMB à l'époque. Utiliser la loi de Wien (Annexe 2 du cours).
- b) On sait qu'aujourd'hui le CMB a une température d'environ  $2,7^\circ\text{K}$ . Quel est son Redshift ?
- c) En utilisant la loi de Hubble, peut-on déterminer la distance qui nous sépare du découplage ? Si oui : le faire. Sinon : expliquer pourquoi.

## Exercice 6 : Distance lumineuse

Dans l'exercice 1 nous avons vu qu'il est possible de déterminer la distance de certaines sources à partir du redshift.

Néanmoins, pour certaines sources appelées **chandelles standard**, dont nous connaissons la luminosité absolue  $L$  (sa puissance radiative, en  $\text{W}$ ) nous pouvons déterminer leur distance en mesurant le flux reçu  $f$  (la puissance par unité de surface, en  $\text{W}/\text{m}^2$ ). La distance déterminée de cette manière s'appelle **distance lumineuse**, indiquée  $D_L$ .

Un exemple important de chandelle standard utilisée en cosmologie est celui des explosions de **supernovae Ia**. Vidéo sur le site : [https://it.wikipedia.org/wiki/Supernova\\_di\\_tipo\\_Ia](https://it.wikipedia.org/wiki/Supernova_di_tipo_Ia)



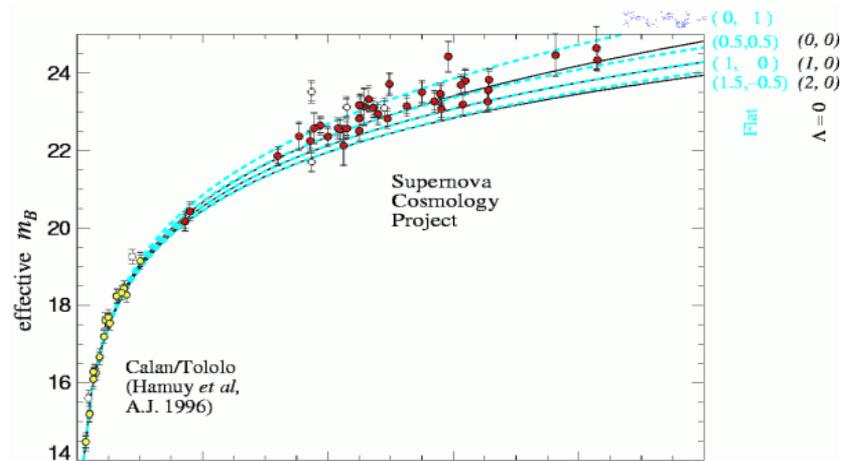
Crédit : NASA/CXC/Rutgers/J.Warren & J.Hughes et al.

Cette photo est une image dans les rayons X des restes de la supernova Ia, observée en 1572 par l'astronome danois Tycho Brhae.

- a) Donner la formule exprimant la distance  $D_L$  entre un observateur et une source en fonction de sa luminosité absolue  $L$  et du flux mesuré  $f$ . Admettre que l'émission de la source a une symétrie sphérique.
- b) En sachant que la luminosité d'une supernova Ia est de l'ordre de dix milliards de fois plus grande que celle du Soleil ( $L_{Soleil} = 4 \cdot 10^{26} \text{W}$ ), quel est l'ODG de sa distance si on mesure un flux de  $10^{-13} \text{W}/\text{m}^2$  ? Donner la réponse en m et en Mpc.
- c) En mesurant leur éclat, et en le comparant avec le redshift, nous observons que, pour les plus lointaines, les distances correspondantes devraient être beaucoup plus grandes que celles attendues si l'Univers était composé uniquement de matière - qu'elle soit ordinaire ou noire - car celle-ci devrait ralentir son expansion par attraction gravitationnelle (voir graphique ci-dessous). Comment expliquer cela ?

Le graphique ci-contre montre les mesures publiées dans un article scientifique en 1998 (Perlmutter et al., Prix Nobel en 2011).

Il s'agit de la magnitude des supernova 1a,  $m_s$  (une fonction de l'éclat :  $m_s = -2,5 \cdot \log f_s + \text{constante}$ ) en fonction du redshift.



Crédit : Perlmutter & al. , *Astrophysical Journal* 517, 565-586, juin 1999.

### Exercice 7 : Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse.

- 1) Les galaxies spirales sont plus anciennes par rapport aux elliptiques.
- 2) Les baryons sont des particules qui interagissent uniquement gravitationnellement.
- 3) A cause de l'expansion de l'Univers, la vitesse de récession entre deux galaxies très éloignées peut dépasser la vitesse de la lumière, même si la Relativité affirme que rien ne peut aller plus vite que  $c$ .
- 4) En Relativité la matière est une forme d'énergie. Donc la matière noire et l'énergie noire sont deux manières de nommer la même chose.
- 5) Juste avant le découplage, la matière noire était libre de s'effondrer par attraction gravitationnelle, car elle n'interagissait pas avec le rayonnement électromagnétique.
- 6) Le Big Bang est une explosion arrivée à un certain instant, qui a donné naissance à l'Univers.

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

---

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
- Série 2 : Expansion
- Série 3 : Principe d'équivalence
- Série 4 : Courbure
- Série 5 : Lentille gravitationnelle
- Série 6 : Trous noirs
- Série 7 : Equations cosmologiques
- Série 8 : Chronologie du Big Bang
- Série 9 : Ondes Gravitationnelles

-----  
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique

- Activité expérimentale 2 : La courbure du cône



**SwissMAP**

The Mathematics of Physics  
National Centre of Competence in Research



**UNIVERSITÉ  
DE GENÈVE**

Didactique de la physique

©Terms of use

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 3 : Principe d'équivalence***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

## Série 3 : Principe d'équivalence

### Exercice 1 : Charge électrique, masse grave (ou charge gravitationnelle) et masse inerte.

On donne deux corps de masses et charges électriques respectives  $m_1, q_1$  et  $m_2, q_2$ .

- On place séparément chacun de ces corps à une distance  $d$  d'une troisième masse  $M$  ayant charge électrique nulle. Donner les deux formules exprimant les accélérations dues à l'interaction gravitationnelle avec  $M$  pour chacun des deux corps.
- On place séparément chacun de ces corps à une distance  $d$  d'une troisième charge  $Q$  ayant une masse négligeable. Donner les deux formules exprimant les accélérations dues à l'interaction électrique pour chacun des deux corps.
- Est-ce que l'accélération dépend des caractéristiques des corps 1 et 2 dans le cas a)? Et dans le cas b)? Expliquer pourquoi.
- Peut l'accélération être répulsive dans le cas a)? Et dans le cas b)? Expliquer pourquoi.

### Exercice 2 : L'avion fou

- Que peut-on dire de la vitesse de l'avion de la photo ci contre ? Et de son accélération ?
- Sans autres informations, pouvons-nous savoir si l'avion est en train de s'approcher ou de s'éloigner de la surface terrestre ?



### Exercice 3

Pour chaque point, cocher la case qui correspond à l'affirmation correcte, puis justifier le choix effectué. *Procédure par exclusion possible (expliquer pourquoi certains choix sont faux).*

1. L'équivalence entre la masse et l'énergie implique
  - que la masse grave est différente de la masse inerte.
  - qu'un corps possède de l'énergie juste parce qu'il a une masse.
  - que la masse est toujours conservée.
  - que la forme de l'espace-temps n'est pas influencée par l'énergie qu'il contient.
  - que la forme de l'espace-temps est influencée par la masse qu'il contient uniquement si celle-ci est assez importante.
  
2. Une personne est enfermée dans une boîte sans fenêtres, loin de tout astre. Pour quelques minutes elle est écrasée contre une face de la boîte, puis elle flotte à son intérieur. Explication possible :
  - la boîte a été d'abord accélérée, puis décélérée jusqu'à l'arrêt.
  - la boîte a été d'abord accélérée, puis l'accélération a cessée et la boîte a continué son mouvement à vitesse constante.
  - la boîte a toujours bougé avec vitesse constante.
  - la boîte a toujours bougé avec accélération constante.
  - La boîte suivait d'abord un mouvement rectiligne et uniforme puis, lorsque l'homme flottait, elle a accéléré.

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
- Série 2 : Expansion
- Série 3 : Principe d'équivalence
- Série 4 : Courbure
- Série 5 : Lentille gravitationnelle
- Série 6 : Trous noirs
- Série 7 : Equations cosmologiques
- Série 8 : Chronologie du Big Bang
- Série 9 : Ondes Gravitationnelles

-----  
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique

- Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

©Terms of use

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 4 : Courbure***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

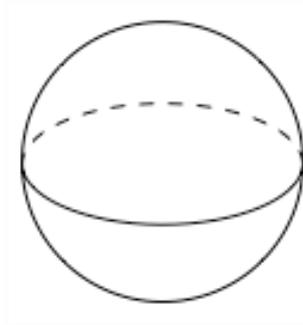
## Série 4 : Courbure

### Exercice 1 : Solides

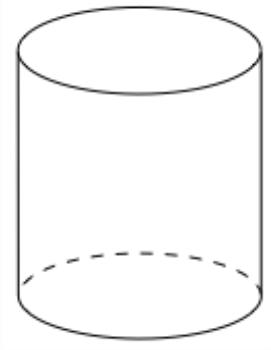
a) À chacun des objets (ou morceau d'objets) suivants on associe le solide représenté à côté. À la surface de chaque solide, colorier

- en **gris** les parties de surfaces, lignes ou points formées par des points à courbure de Gauss  $k_G$  positive ;
- en **bleu** les parties de surfaces, lignes ou points formées par des points avec  $k_G$  **négative** ;
- en **rouge** les parties de surfaces, lignes ou points avec  $k_G$  **nulle**.

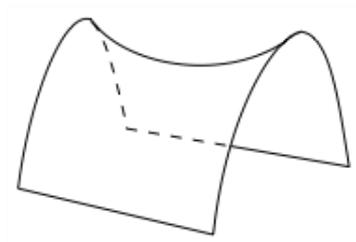
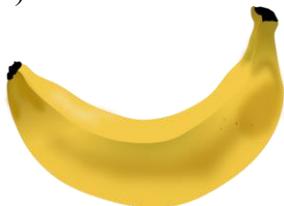
1)



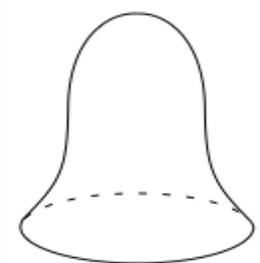
2)



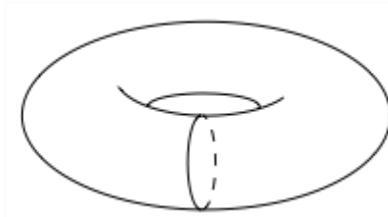
3)



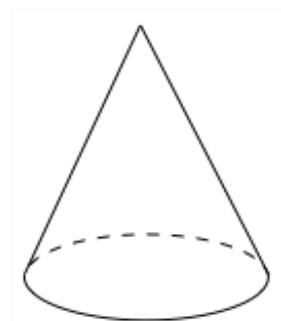
4)



5)



6)



b) Pour chaque solide colorié, peut-on déterminer quel est le signe de la courbure totale  $K$  ? La calculer si possible.

## Exercice 2 : Cercle osculateur d'une parabole

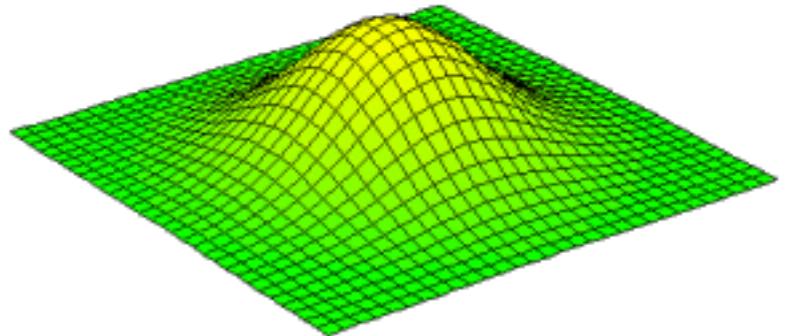
Considérons la parabole d'équation  $y_p(x) = x^2$ .

- Déterminer le rayon de courbure  $R$  du cercle osculateur à cette parabole dans le point  $(0;0)$ .  
Quelle est sa courbure en ce point ?
- Trouver la courbure de la même parabole, mais au point  $(1;1)$ .
- Ecrire l'équation donnant la courbure en un point générique de la parabole  $(x ; y = x^2)$  en fonction de l'abscisse du point :  $k(x)$ .
- Pourquoi parler du cercle osculateur d'une droite ne fait pas de sens ?

*Méthode conseillée : écrire l'équation générique du cercle puis expliciter  $y_c(x)$  (attention au choix du signe de la racine). Ensuite résoudre le système imposant 1) le passage par le point choisi, 2) l'égalité des dérivées premières  $y'_c = y'_p$  et 3) l'égalité des dérivées deuxièmes  $y''_c = y''_p$ .*

## Exercice 3 : La bosse

Imaginez une fine feuille souple et plate. On appuie légèrement avec un doigt par dessous en poussant vers le haut, jusqu'à créer une bosse comme celle de la figure ci-contre.



- Quelle est la courbure de Gauss des points sur la feuille avant qu'on appuie ? Et la courbure totale de la feuille ?
- Mêmes questions, mais après la déformation.

image : [paolazzarini.it](http://paolazzarini.it)

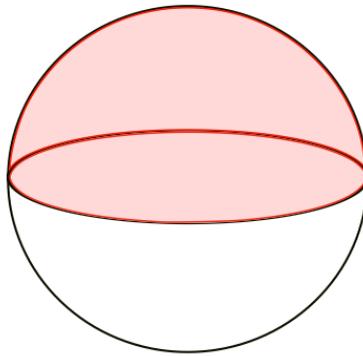


## Exercice 4: Transport parallèle

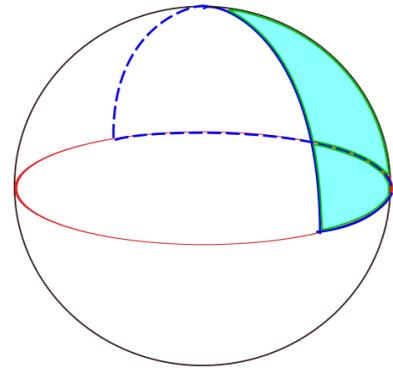
a) En utilisant la définition de courbure totale d'une surface et le raisonnement, déterminer quelle est la courbure totale de la surface

- 1) d'une sphère ;
- 2) d'une demie sphère (figure ci contre, en haut à gauche);
- 3) d'un quart de sphère (figure ci contre, en haut à droite);
- 4) d'un huitième de sphère (figure ci contre, en bas).

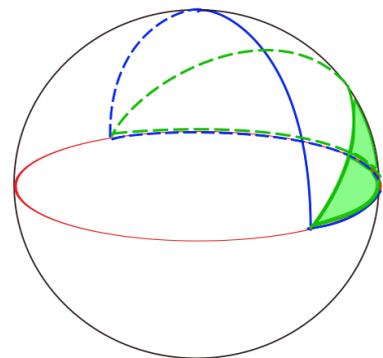
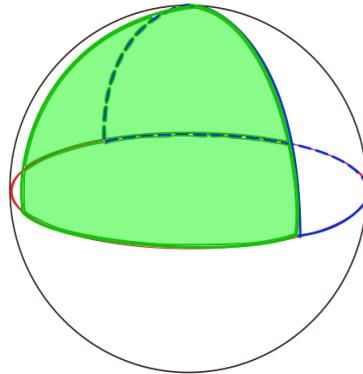
2)



3)



4)

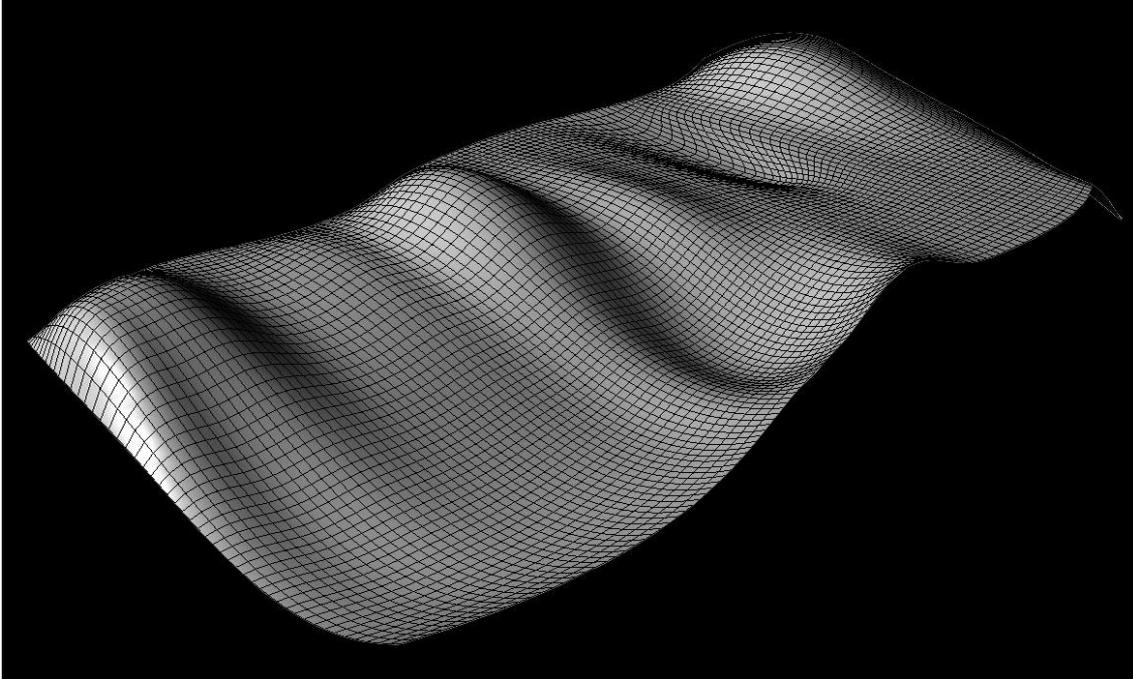


b) Utiliser la méthode du transport parallèle pour vérifier les 4 résultats donnés au point a). Pour le huitième de sphère tester les deux possibilités : en partageant le quart dans les deux sens possibles, de sorte à obtenir un triangle ou un « biangle » (figure ci contre, en bas).

c) Généraliser les résultats donnés au point a) : quelle est la courbure totale de la surface de la n-ème partie d'une sphère ?

## Exercice 5: La toiture

La surface suivante représente un projet de toiture : il y a 10 zones visibles et distinctes à courbure de Gauss positive, et 10 zones visibles à courbure de Gauss négative. Colorier les zones à courbure positive au crayon rouge, et les zones à courbure négative (certaines adjacentes) au crayon bleu.



Source : [http://design.rootiers.it/strutture/comments/recent\\_calcolo?page=2](http://design.rootiers.it/strutture/comments/recent_calcolo?page=2)

## Exercice 6: Le cylindre

a) Sur une feuille A4 (ou un autre format) placez deux points P et Q tels que leur distance soit du même ordre de grandeur que la taille de la feuille. Tracer la géodésique passant par ces deux points. Est-ce qu'elle correspond au plus court chemin entre ces deux points ?

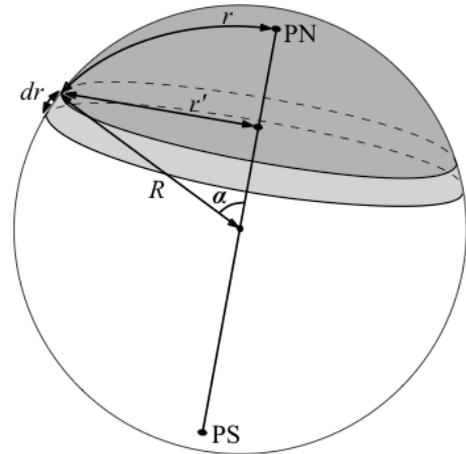
b) Avec la même feuille, construire un cylindre en collant deux bords opposés, de sorte que la géodésique tracée au point a) soit à l'extérieur.

- Est-ce que la géodésique tracée au point a) reste une géodésique du cylindre ? Est-elle encore le plus court chemin entre P et Q ? Si non, tracer le plus court chemin sur le cylindre.
- Combien de géodésiques reliant P et Q existent à la surface du cylindre ?
- Qu'est-ce qu'il se passe si au lieu de dessiner les points P et Q comme indiqué au point a), on les dessine très proches, au milieu de la feuille ? Que peut-on en déduire ?

## Exercice 7 : Cercles, disques et sphères dans un espace courbe

Dans un espace 2D plat les formules du périmètre et de l'aire d'un disque de rayon  $r$  sont  $P(r) = 2\pi r$  et  $A(r) = \pi r^2$ .

a) En vous aidant de la figure ci-contre, écrire les équations correspondantes à celles cités ci-dessus, mais dans un espace courbe, avec courbure de Gauss constante positive  $k = 1/R^2$  (la sphère du dessin) :  $P(r,R)$  et  $A(r,R)$ .



b) Pour les deux formules trouvées au point a), vérifier que pour les valeurs limites

- $r = 0$  (au pôle nord, point PN),
- $r = \pi R/2$  (à l'équateur),
- $r = \pi R$  (au pôle sud, point PS),

on a les résultats attendus (par exemple pour le périmètre  $P(r=0) = 0$ ,  $P(r=\pi R/2) = 2\pi R$  et  $P(r=\pi R) = 0$ ).

c) En suivant la même procédure que pour l'aire et le périmètre d'un cercle de rayon  $r$ , donner la formule du volume d'une sphère de rayon  $r$  dans un espace 3D courbé avec rayon de courbure constante positive.

*AIDE - Dans un espace courbé (rayon de courbure  $R$ ) : de la même manière que l'aire (2D) d'un cercle de rayon  $r$  correspond à celle de la calotte d'une sphère 3D de rayon  $R$ , le volume d'une sphère (3D) de rayon  $r$  correspond au volume de la calotte d'une hypersphère 4D de rayon  $R$ .*

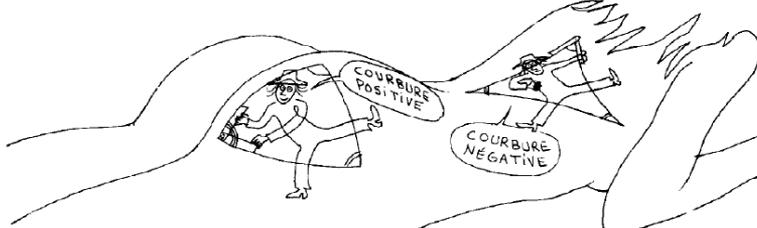
*Pour ce point il n'y a pas de visualisation possible, il faut faire confiance aux calculs... et tester le résultat avec le cas limite  $r \rightarrow 0$*

Voici deux BD qui donnent une intuition de ce qui se passe avec les grandeurs géométriques dans un espace courbe (surtout périmètres et surfaces).

Le géométricon :

<http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/geometricon.htm>

*Si cette somme est inférieure à  $180^\circ$ , on peut définir un rayon de courbure  $R$ , donné par :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \left(1 - \frac{A}{3,14 R^2}\right)$  mais il n'a plus le sens physique habituel.  
On notera qu'un PLAN peut être assimilé à une surface ayant un rayon de courbure  $R$  infini.  
On retrouve alors tous les théorèmes d'Euclide.*



Le trou noir :

[http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/trou\\_noir.htm](http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Francais/trou_noir.htm)

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
- Série 2 : Expansion
- Série 3 : Principe d'équivalence
- Série 4 : Courbure
- Série 5 : Lentille gravitationnelle
- Série 6 : Trous noirs
- Série 7 : Equations cosmologiques
- Série 8 : Chronologie du Big Bang
- Série 9 : Ondes Gravitationnelles

-----  
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique

- Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

©Terms of use

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 5 : Lentille gravitationnelle***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

## Série 5 : Lentille gravitationnelle

### Exercice 1 : Angle de déviation $\alpha$ (analyse dimensionnelle)

On peut trouver une formule pour l'angle de déviation sans facteur numérique (2 pour Newton et 4 pour Einstein), mais d'une manière plus simple : l'analyse dimensionnelle.

L'idée est de considérer que cette déviation doit dépendre de uniquement 3 quantités :

- 1) L'accélération gravitationnelle à la distance la plus proche (le paramètre d'impact) :  $g = \frac{GM}{d^2}$ ,  
 puisque il s'agit d'une accélération, ses unités fondamentales SI doivent être les  $\mathbf{m \cdot s^{-2}}$ .
- 2) Le paramètre d'impact  $d$  (la distance de passage), dont l'unité SI est le  $\mathbf{m}$ .
- 3) La vitesse de passage  $c$ , dont l'unité SI est le  $\mathbf{m \cdot s^{-1}}$ .

Puisque la déviation est un angle, sans dimensions, ses unités SI sont des radians. Donc dans la combinaison  $\alpha \propto g^p \cdot d^q \cdot c^r$ , où  $p$ ,  $q$ , et  $r$  sont des nombres entiers, les mètres et les secondes doivent forcément se simplifier. Utiliser cela pour trouver des contraintes pour les exposants entiers  $p$ ,  $q$ , et  $r$ . Choisir la solution la plus simple pour trouver la formule (sans facteur numérique) de la déviation.

### Exercice 2 : Déviation du Soleil

Selon la formule relativiste, obtenue en 1915 par A. Einstein, la déviation d'un rayon de lumière est deux fois plus grande que selon le calcul approximatif newtonien. Expérimentalement, on peut mesurer cette déviation pour la lumière provenant d'une étoile lointaine lorsqu'elle passe près du Soleil. L'idée est de mesurer la position d'une étoile dans le ciel lorsque le Soleil n'est pas présent, puis de comparer cette position avec celle mesurée lorsque l'image du Soleil est près de celle de l'étoile : l'image sera décalée d'un angle  $\alpha$ .

Mais, pour ce faire, il est nécessaire de prendre cette deuxième mesure pendant une éclipse solaire totale, sinon la lumière du jour ne permettrait pas de voir celle de l'étoile.

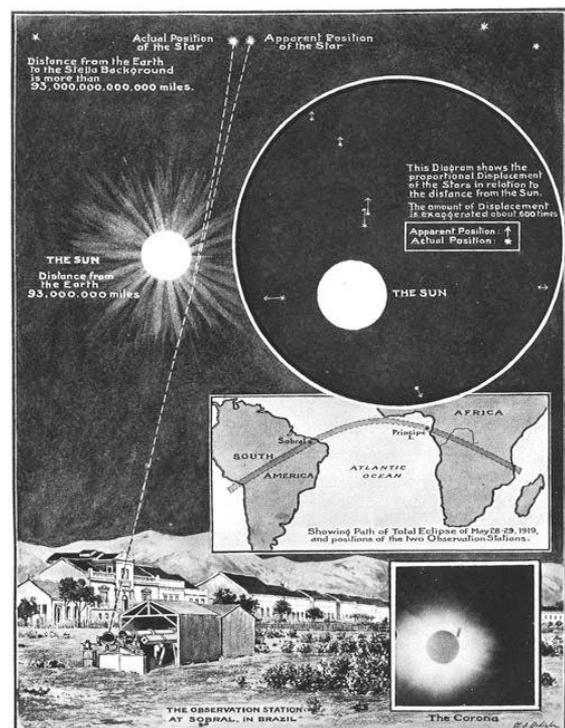
**L'observation de l'angle de déviation de la lumière d'étoiles pendant l'éclipse solaire de 1919 par Eddington fut la première expérience visant la confirmation de la théorie d'Einstein.**  
 Les images suivantes sont celles parues dans "The New York Times" du 10 novembre 1919, elles célèbrent la confirmation de la Relativité Générale.

### LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less  
Agog Over Results of Eclipse  
Observations.

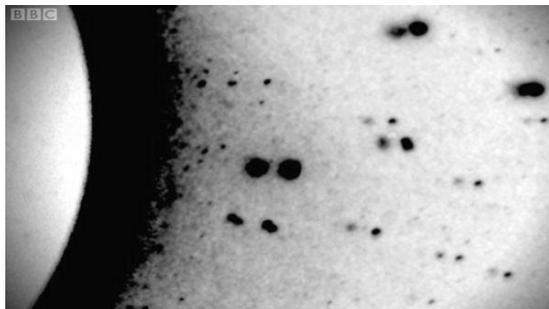
### EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed  
or Were Calculated to be,  
but Nobody Need Worry.

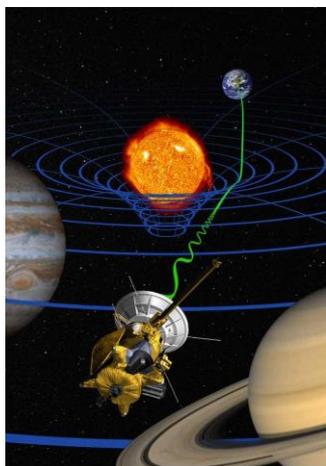


En réalité la mesure d'Eddington n'était pas assez précise pour confirmer définitivement la Relativité. Le graphique ci-dessous, à droite, montre son résultat (le premier optique) et les autres résultats obtenus tout au long du dernier siècle, en mesurant l'angle de déflexion de la lumière pour des différentes longueurs d'onde du spectre électromagnétique (visible et radio), mais aussi en mesurant le retard dans l'émission du signal (effet « Shapiro »), à cause de la courbure de l'espace-temps. Le paramètre  $\gamma$  dans l'axe des y mesure l'écart de la prévision relativiste:  $\alpha = \alpha_{Einstein} \cdot (1+\gamma)/2$ . Plus  $\gamma$  s'approche de l'unité, plus l'angle mesuré est en accord avec la prédiction d'Einstein; plus il s'approche de 1/2, plus il confirme le résultat newtonien. Les flèches vers le haut indiquent que la barre d'incertitude sort du graphique.

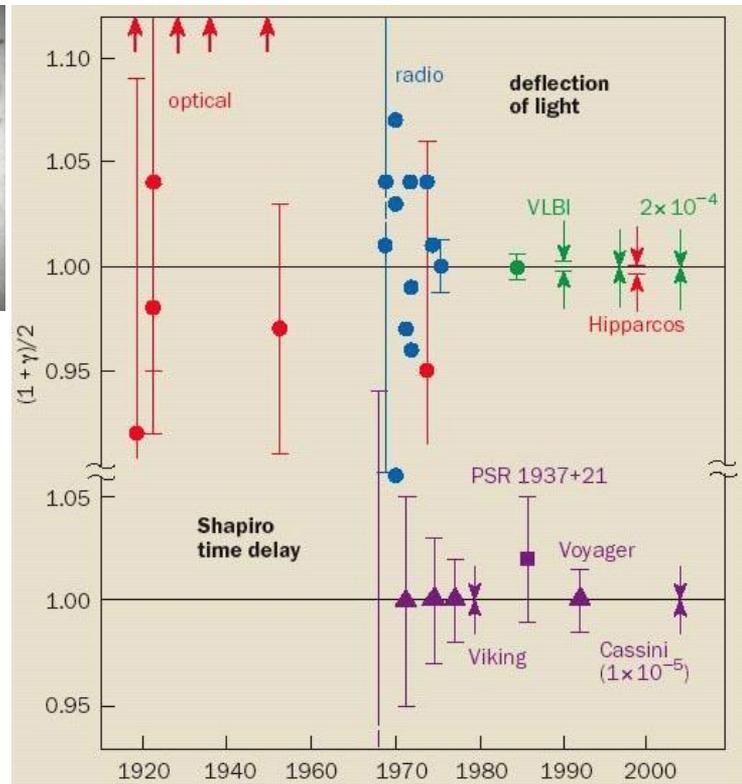
Dans les images ci dessous à droite : en haut on observe la position des étoiles en présence du Soleil (décalée) par rapport à la position observée en l'absence du Soleil ; en bas une image de la sonde Cassini, mesurant le paramètre  $\gamma$  par le temps de retard de la réception du signal.



Crédit: Arthur Eddington  
Source: <https://briankoberlein.com/2014/05/19/einstein-eddington/>



Crédit :NASA/JPL-Caltech



Source : <http://physicsworld.com>

Calculer la déviation d'un rayon de lumière passant à une distance  $d = R_{Soleil}$  du centre du Soleil en utilisant

- 1) la formule newtonienne,
- 2) la formule relativiste.

Lien Earthmagazine :

<http://www.earthmagazine.org/article/benchmarks-solar-eclipse-proves-relativity>



Lien ESA :

[http://www.esa.int/Our\\_Activities/Space\\_Science/Relativity\\_and\\_the\\_1919\\_eclipse](http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Relativity_and_the_1919_eclipse)



### Exercice 3 : Lensing lunaire ?

On peut facilement mesurer une déviation de l'ordre de  $1''$  pour l'image d'une source.

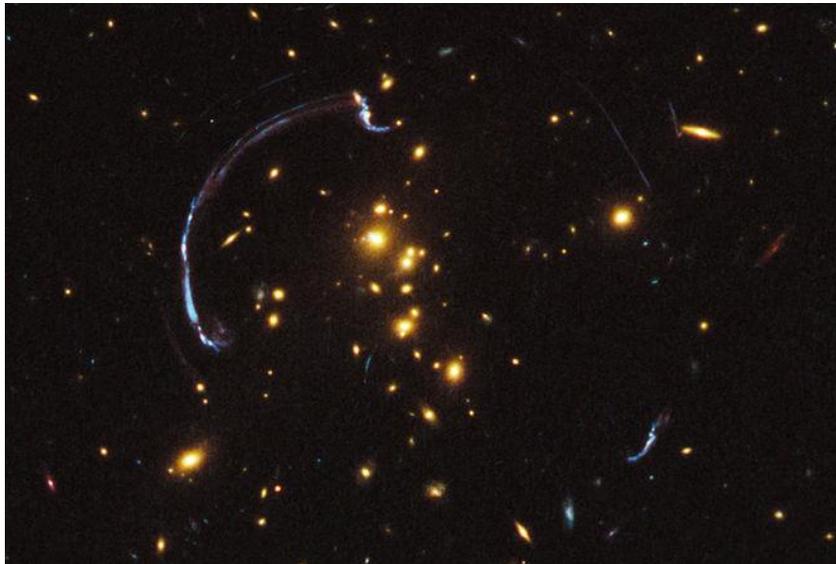
- Convertir  $1''$  en radians. Donner cette conversion avec un nombre de chiffres significatifs facile à retenir.
- Calculer le paramètre d'impact  $d$  qu'un rayon de lumière doit avoir pour que la Lune produise une déviation  $\alpha \sim 1''$ .
- Pourquoi la Lune ne peut pas produire du lensing gravitationnel observable? Quelle devrait être l'ordre de grandeur de sa densité pour qu'elle produise du lensing observable?



source : <http://www.worldmapsonline.com>

### Exercice 4 : RCS2 032727-132623

L'image suivante a été prise par le télescope Hubble en 2012. En jaune brillant, au centre, on observe l'amas de galaxies RCS2 032727-132623, à environ 2Gpc de nous.



Crédit: NASA, ESA, J. Rigby, K. Sharon and M. Gladders and E. Wuyts.

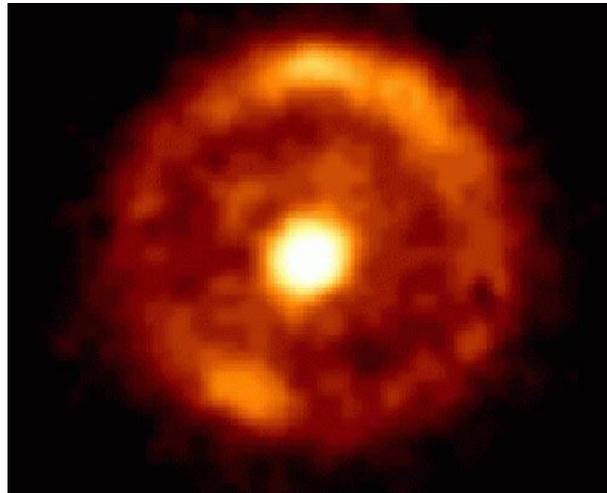
Source : <http://www.space.com/14481-hubble-photo-brightest-galaxy-gravitational-lens.html>

- Indiquer quels sont les indices permettant d'affirmer que cet amas est une lentille gravitationnelle. Expliquer sa réponse par un schéma en indiquant la trajectoire des rayons de lumière jusqu'à l'observateur.
- De quel type de lensing gravitationnel s'agit-il ? Justifier.
- Pourquoi n'observe-t-on pas d'anneau d'Einstein dans ce cas ?
- Peut-on distinguer des images de la même source ?

## Exercice 5 : L'anneau d'Einstein

Le premier anneau d'Einstein, B1938+666, fut observé en 1998 par L. J. King et al.. Même si l'image est seulement d'environ 1 second d'arc, le diamètre de l'anneau est en réalité de dizaines de kpc.

L'image ci-dessous date aussi de 1998 et représente la galaxie SDSSJ1430 (en bleu) vue au travers d'une lentille gravitationnelle (la galaxie en blanc, beaucoup plus proche). Les images de droite, du haut en bas représentent respectivement :

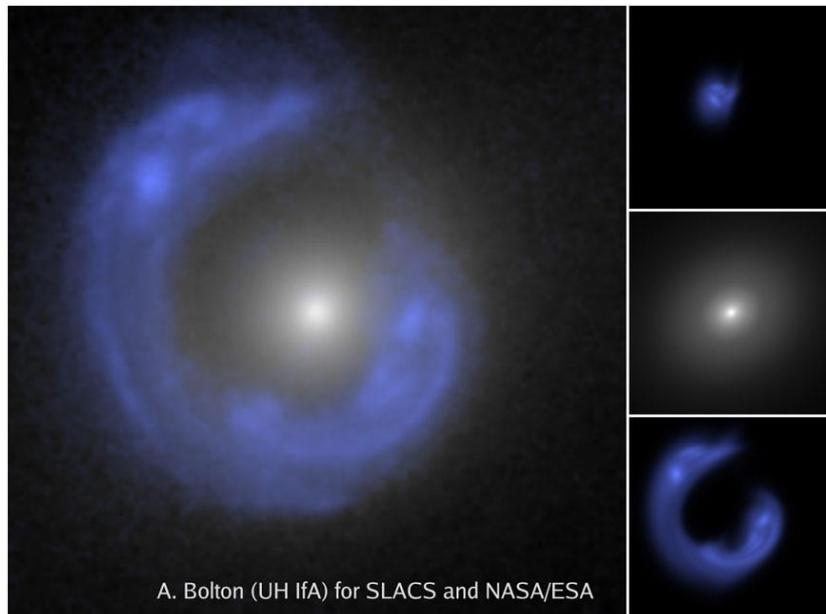


Source : <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/einring.html>

1) une reconstruction informatique de comment devrait apparaître l'image de la source sans lentille,

2) la lentille toute seule et

3) l'image déformée toute seule.



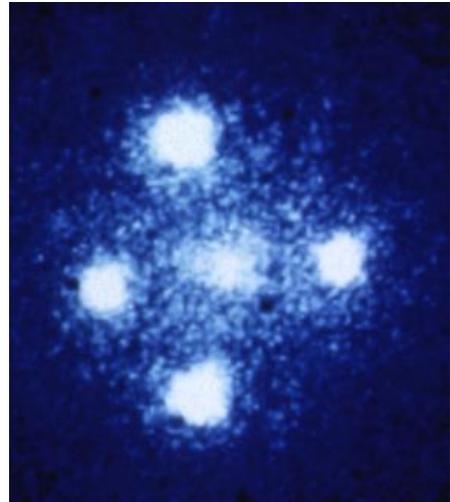
Source : <http://apod.nasa.gov/apod/ap080728.html>

- Expliquer dans quelles conditions nous pouvons observer ce type d'images.
- Les astrophysiciens utilisent ces observations pour estimer la masse de la lentille : on mesure les redshifts pour la lentille  $z_L = 0,285$  et pour la source  $z_S = 0,575$ , ainsi que le rayon d'Einstein  $\theta = 1,51''$ . En utilisant ces données calculer la masse de la lentille. Donner le résultat en kg et en masses solaires. *Ne pas oublier de convertir  $\theta$  en radians.*
- Combien de chiffres significatifs a ce résultat? Quelles sont les sources d'incertitude?
- Pourquoi ce type d'estimations de masses à grandes échelles sont importantes en Cosmologie Moderne ?

## Exercice 6 : La croix d'Einstein

La photo de la croix d'Einstein ci-contre date de 1990 et est la plus détaillée jamais produite de cet objet. Les 4 images qui forment la croix ont un redshift de 1,7, ce qui correspond à la distance de 3Gpc, alors que la galaxie au centre a un redshift de 0,0394.

De plus, on a mesuré la distance angulaire moyenne entre les quatre images de la croix et le centre (que nous pouvons considérer comme une bonne estimation du rayon d'Einstein associé): 0,8 seconds d'arc.



*Credit: NASA, ESA, and STScI*

- a) Expliquer (1) quel est le phénomène à la base de cette observation, (2) quelles sont les conditions pour que cette image en forme de croix se produise.
- b) En utilisant la loi de Hubble, vérifier que la distance de la galaxie au centre de l'image est de 0,2Gpc.
- c) En déduire la distance entre la galaxie au centre (L) et la source des 4 images (S).
- d) Déterminer le rayon d'Einstein de cette image en radians.
- e) Ecrire la formule reliant ce rayon d'Einstein à la masse de la galaxie au centre de l'image.
- f) En déduire une estimation de la masse de la galaxie au centre de l'image en kg, puis en masses solaires.

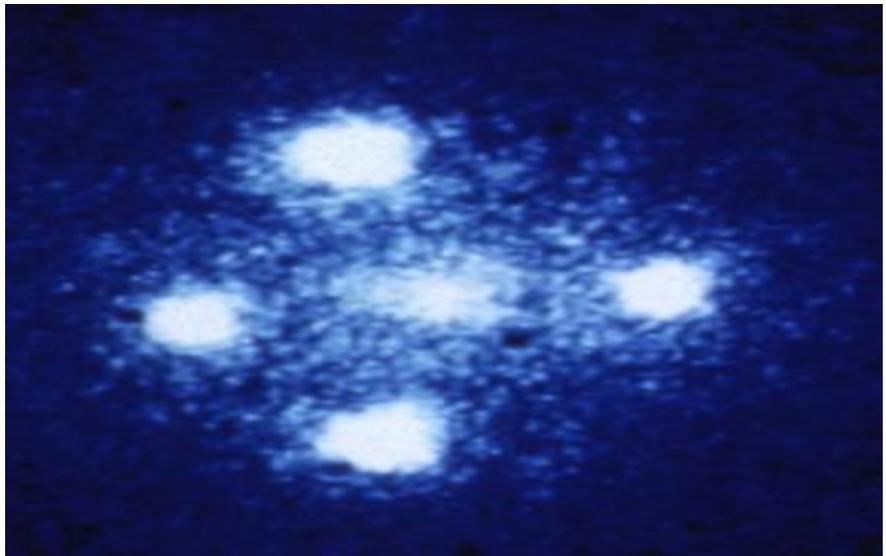
## Exercice 7 : Pourquoi un verre à vin ?

- a) On peut simuler le strong lensing en utilisant une lentille optique (en plexiglas par exemple), à condition que son profil soit bien choisi. Expliquer pourquoi un profil biconvexe n'est pas convenable.

Considérons une lentille optique d'indice de réfraction  $n$ , dont la forme est semblable à celui d'un pied de verre à vin. Nous voulons savoir quel devrait être son profil pour qu'elle simule une lentille gravitationnelle ponctuelle de masse  $M$ .

Le graphique suivant représente une modélisation de la lentille souhaitée: sa base est plate (l'axe des  $x$ ) et le profil est donné par la fonction  $y(x)$ , inconnue. Nous souhaitons qu'elle ait le même effet gravitationnel qu'une masse  $M$  située à l'origine des coordonnées.

- b) Imaginons un rayon de lumière incident perpendiculairement à la base de la lentille en un point générique  $Q$  assez éloigné du centre, de coordonnées  $(x; 0)$ . Le rayon ne subira pas de déviation en ce point, pourquoi ?



- c) Par contre il sera dévié au point  $P(x; y(x))$ , à la sortie du milieu. Ecrire la loi de la

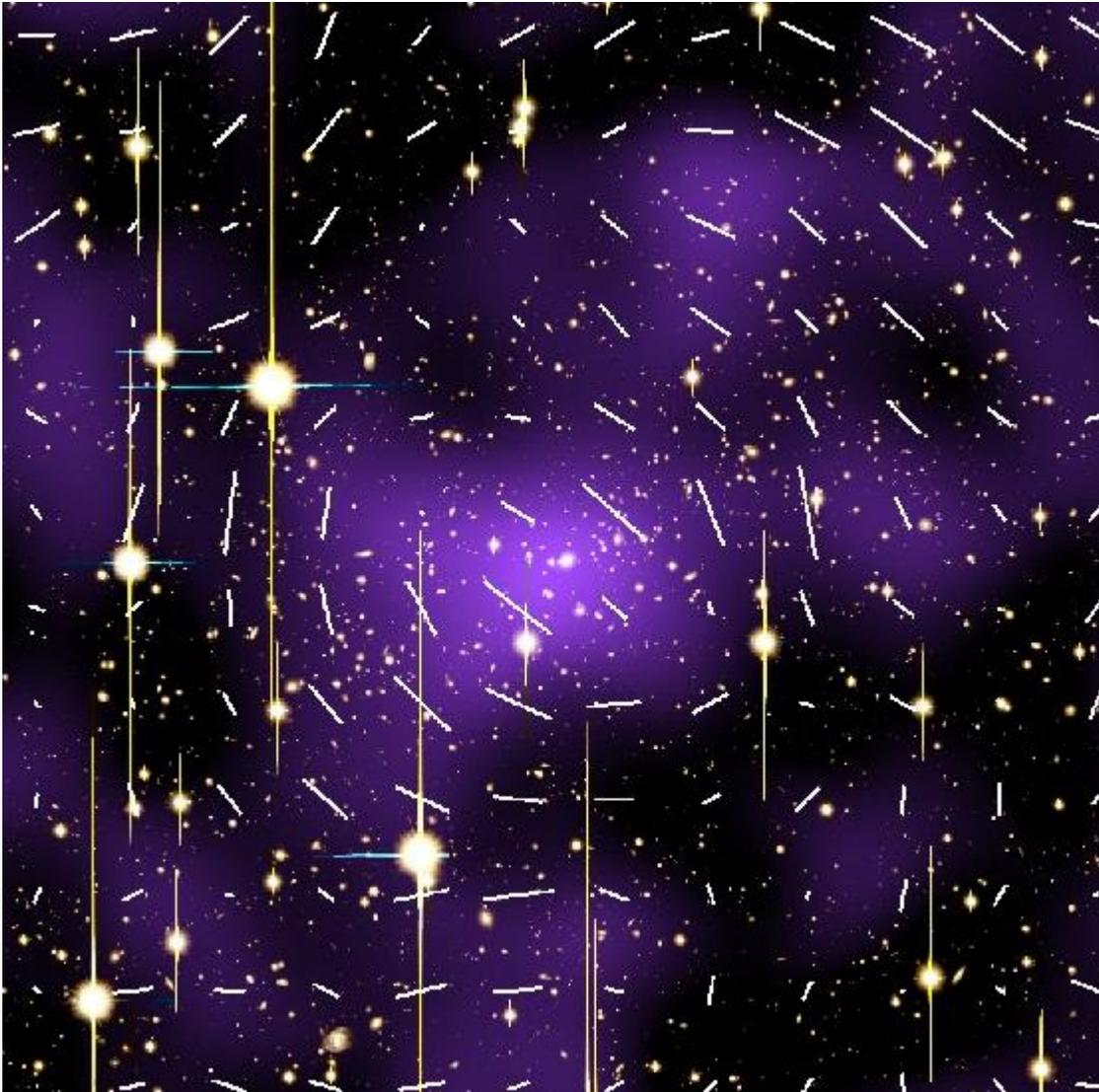
réfraction reliant les angles  $r$ ,  $i$  et l'indice de réfraction  $n$ , avec l'approximation

 et  (car  $r \ll 1$  et  $i \ll 1$ ).

- d) En sachant que  $r = i + \alpha$ , où  $\alpha = 4GM/c^2x$  est la déviation que nous souhaitons avoir pour le rayon de lumière (inversement proportionnel à la distance de passage de la masse  $M$ , cf. exercice 1 de cette série et théorie), et en utilisant l'équation trouvée au point c), écrire la relation entre  $i$ ,  $n$  et  $\alpha$ , puis expliciter  $i$  en fonction de  $G$ ,  $M$ ,  $c$ ,  $x$  et  $n$  : puisque  $G$ ,  $M$ ,  $c$  et  $n$  sont des constantes, nous avons trouvé comment doit varier l'angle d'incidence en fonction de  $x$  :  $i(x)$ .
- e) Puisque  $i$  est l'angle entre le rayon incident (vertical) et la normale à la courbe  $y(x)$  au point  $P$ , la tangente à cette courbe en ce point est  $y'(x) = \frac{dy}{dx} = -i(x)$ . Remplacer l'expression obtenue au point d) pour  $i(x)$  puis intégrer cette équation pour trouver le profil  $y(x)$ .

## Exercice 8 : A2390

Voici une image de l'amas de galaxies A2390. La taille angulaire de cette image est de  $12'$  fois  $12'$ , et dans chaque cellule ( $1'$  fois  $1'$ ) des lignes ont été ajoutés.



Source: Oguri, Masamune et al. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 405 (2010) 2215-2230 arXiv:1004.4214 [astro-ph.CO] (<https://inspirehep.net/record/853072/plots>)



- Peut-on dire qu'un effet de lentille gravitationnelle est présent dans cette image ? Si oui dire quel type de lensing s'agit-il. Dans tous les cas, justifier sa réponse.
- Que représentent les lignes ajoutées dans chaque cellule de l'image ?
- Que représentent les « nuages » en violet (plus claires) ?

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
  - Série 2 : Expansion
  - Série 3 : Principe d'équivalence
  - Série 4 : Courbure
  - Série 5 : Lentille gravitationnelle
  - **Série 6 : Trous noirs**
  - Série 7 : Equations cosmologiques
  - Série 8 : Chronologie du Big Bang
  - Série 9 : Ondes Gravitationnelles
- 
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
  - Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

©Terms of use

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 5 : Lentille gravitationnelle***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

## Série 6 : Trous noirs

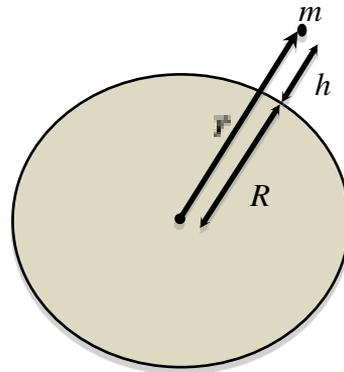
### Exercice 1 : Energie potentielle gravitationnelle

Dans le cours de deuxième année, vous avez appris que l'énergie potentielle gravitationnelle d'un objet à la surface de la Terre est  $E_g(h) - E_g(0) = E_g(r) - E_g(R) = mgh$  où  $h$  est sa hauteur par rapport à la surface terrestre ( $h = r - R$ , où  $r$  est la distance du centre de la Terre et  $R$  le rayon de la Terre) et  $m$  sa masse.

Cette formule est valable seulement si  $h$  est négligeable par rapport au rayon de la Terre. De cette manière  $g = GM_T/r^2$  peut être considéré comme constant, en effet :  $r = R + h \cong R$   
 $\Rightarrow g \cong GM_T/R^2$ .

Sinon, il faut utiliser l'expression plus générale pour l'énergie potentielle gravitationnelle est (cf. théorie)

$$E_g(r) = -\frac{GM_T m}{r^2}.$$



Démontrer que si  $h \ll R \Leftrightarrow r = R + h \cong R$ , alors  $E_g(r) - E_g(R) \cong mgh$ , où  $g = \frac{GM_T}{R^2}$ , selon sa définition.

*Hint : développer la différence algébriquement :*

$$E_g(r) - E_g(R) = -\frac{GM_T m}{r} + \frac{GM_T m}{R} = -\frac{GM_T m}{R+h} + \frac{GM_T m}{R} = \frac{\dots}{(R+h) \cdot R} = \dots \cong mgh.$$

### Exercice 2 : Vitesse de libération

Calculer la vitesse de libération pour un objet lancé depuis

- (I) la surface terrestre ( $r_0 = R_{Terre}$ ),
- (II) la surface de Mars,
- (III) la surface lunaire.

### Exercice 3 : La composition de l'atmosphère des planètes

La température (en °K) d'un gaz est directement proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne de ses particules. Si nous négligeons les mouvements de vibration et de rotation des particules, cette proportionnalité se traduit par la relation

$$E_k = \frac{3}{2} k_B T,$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann (cf. tables CRM) :  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{J/}^\circ\text{K}$ .

- En utilisant la formule de l'énergie cinétique d'une particule de masse  $m$  et vitesse  $v$  et la relation de proportionnalité entre  $E_k$  et  $T$ , exprimer la vitesse moyenne des particules d'un gaz en fonction de la température du gaz et de la masse des particules :  $v_T(m; T)$ . Cette vitesse s'appelle **vitesse thermique** du gaz.
- Calculer la valeur de la vitesse thermique de l'oxygène à la température moyenne à la surface de la Terre :  $15^\circ\text{C}$  :  $v_T(\text{O}_2; 15^\circ\text{C})$ . Est-ce que cette vitesse sera plus grande ou plus petite pour l'hydrogène  $\text{H}_2$  ? Et pour l'azote  $\text{N}_2$  ?
- Comparer cette vitesse avec la vitesse de libération terrestre, en calculant le rapport

$$\eta_{\text{Terre}} = v_T(\text{O}_2; 15^\circ\text{C}) / v_{l \text{ Terre}}.$$

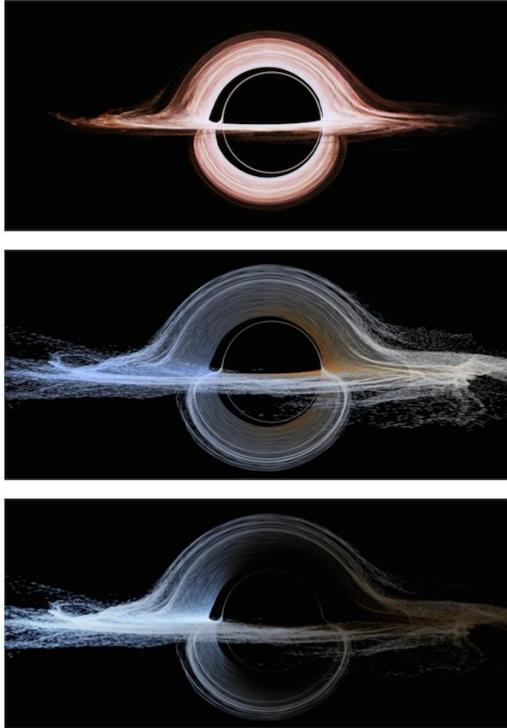
- Faire les mêmes calculs qu'aux points b) et c) mais pour la Lune à lors de sa formation, en sachant que la température moyenne sur la Lune à cette époque (il y a 4 milliards d'années) était d'environ  $2000^\circ\text{C}$  (1 chiffre significatif).
- Expliquer pourquoi la Lune n'a pas d'atmosphère.

Lien utile pour les prochains exercices : table des ODG des densités

[https://en.wikipedia.org/wiki/Orders\\_of\\_magnitude\\_\(density\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_(density))



## Exercice 4 : Le rayon de Schwarzschild



Les images ci-contre montrent Gargantua, le trou noir du film « Interstellar », du haut au bas : comment il a apparu dans le film, et comment il aurait dû apparaître si la science avait été plus importante que le spectacle, selon les simulations de K. Thorne et al., du moins réaliste au plus réaliste. Dans les trois images le trou noir est en rotation (antihoraire en le regardant depuis le haut) avec un disque d'accrétion : la matière rayonnante qui est en train de précipiter qui tourne également à des grandes vitesses.

Image : O. James et al., *Class. Quantum Grav.* 32 065001 (2015), et <http://io9.com/the-truth-behind-interstellar-scientifically-accurate-1686120318>



- Indiquer quel est le rayon de Schwarzschild dans chacune des images de Gargantua, et expliquer pourquoi l'image du trou noir est enveloppée par dessous et par dessus d'un disque lumineux.
- Expliquer pourquoi dans les images plus réalistes le disque d'accrétion présente des nuances en bleu ou en rouge.
- Calculer le rayon de Schwarzschild d'un trou noir ayant une masse égale à celle de la Terre. Quelle devrait être la densité de la Terre si toute sa masse était concentrée à l'intérieur de son rayon de Schwarzschild ? Connaît-on des objets avec cette densité ?
- Faire les mêmes calculs qu'au point c) pour le Soleil.

Vidéos :

Simulation de la collision entre deux trous noirs : <http://apod.nasa.gov/apod/ap151020.html>



Si une étoile s'approche trop d'un trou noir: <http://apod.nasa.gov/apod/ap151028.html>



## Exercice 5 : Notre univers est-il un trou noir ?

- a) Ecrire la formule exprimant la densité moyenne d'un trou noir en fonction de sa masse  $\rho_m(M)$ . S'agit-il d'une fonction constante, croissante ou décroissante ?
- b) À partir de cette formule déterminer l'ordre de grandeur de la densité d'un trou noir avec une masse égale à
- I. une tonne :  $\rho_m(1t)$  ;
  - II. celle de la Terre :  $\rho_m(M_{Terre})$  (comparer avec le résultat de l'exercice 3) ;
  - III. celle d'une grosse étoile (environ 10 fois la masse du Soleil) :  $\rho_m(10M_{Soleil})$  ;
  - IV. celle du noyau de notre galaxie, SgrA\* :  $\rho_m(3,5 \cdot 10^6 M_{Soleil})$  ;

Le noyau de notre galaxie contient un trou noir supermassif dont la masse est de environ 3,5 millions de masses solaires. Les scientifiques ont déduit sa présence en mesurant la vitesse de rotation rapide des étoiles autour de la source de rayons X Sgr A\* [https://www.e-education.psu.edu/astro801/content/18\\_p7.html](https://www.e-education.psu.edu/astro801/content/18_p7.html)



- V. celle de l'Univers observable : une sphère de rayon  $r_H = c/H_0$  et densité moyenne égale à la densité critique  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$ . *Hint : avec la densité critique, trouver d'abord la masse contenue dans le rayon de Hubble :  $M_H$ , ensuite calculer  $\rho_m(M_H)$ .*

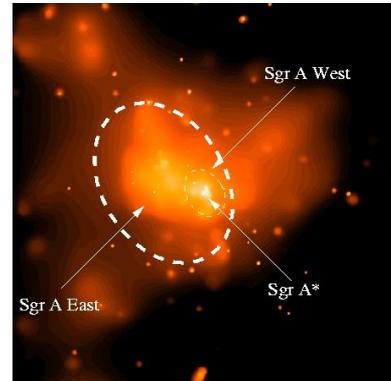


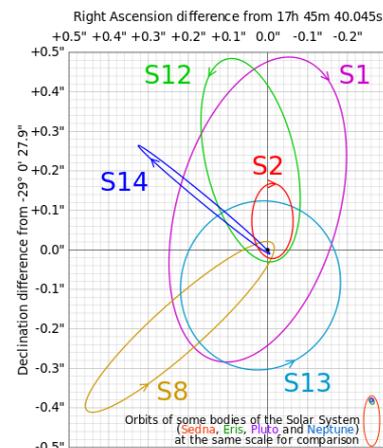
Image : NASA Chandra X-Ray Observatory and Penn State University.

- c) Peut on obtenir le résultat V. de manière algébrique ?

## Exercice 6 : Le trou noir supemassif dans Sgr A\*

Nous admettons que le mouvement de S2 soit circulaire et uniforme, avec rayon  $r = 1200$  UA, soit 10 fois plus grand que son périhélie (cf. exercice 4 de la série 1) et vitesse scalaire constante et égale à la vitesse scalaire moyenne sur une orbite:  $v = v_m$ . Nous savons que la masse de cette étoile est plusieurs ordres de grandeur plus petite que celle du trou noir au centre de l'orbite :  $m \ll M$ . À partir des résultats de exercice 4 de la série 1, répondre aux points suivants.

- a) Donner une estimation de la masse contenue à l'intérieur de l'orbite de S2, en kg et en  $M_{Soleil}$ . Utiliser les équations du mouvement circulaire uniforme (MCU).
- b) Calculer le rayon de Schwarzschild d'une telle masse et le comparer au rayon de l'orbite de S2.
- c) Nous savons que le périhélie d'une autre étoile orbitant autour du trou noir supermassif, S14 (connue aussi sous le nom de S0-16), est de 45 UA. Pourquoi nous pouvons affirmer que la masse contenue à l'intérieur de l'orbite de ces deux étoiles est un trou noir?



Crédit : By Cmglee - Own work, CC BY-SA 3.0,

## Exercice 7: NCG1232 au travers d'un trou noir

Les deux images suivantes montrent la même galaxie, NCG1232, avec le redshift  $z = 0,0053$ .



Crédit : <http://arachnoid.com/relativity/index.html> et [https://fr.wikipedia.org/wiki/NGC\\_1232](https://fr.wikipedia.org/wiki/NGC_1232)

À gauche, NCG1232 apparaît comme nous l'observons actuellement ; à droite elle apparaît comme nous l'observerions si un trou noir de 4,3 millions de masses solaires était intercalé à mi-chemin entre nous (l'observateur, O) et NCG1232 (la source, S).

g) Répondre aux points suivants :

- Quel est le phénomène qui explique la formation de l'image de droite ?
- Dessiner un schéma indiquant les positions de S, de O et du trou noir ainsi que la trajectoire des rayons de lumière.
- Comment appelle-t-on le cercle lumineux observé dans l'image de droite et quelles sont les conditions pour qu'un tel cercle se forme ?
- Comment l'image de droite se modifierait si le trou noir n'avait pas une symétrie sphérique parfaite ?

h) Exprimer la masse du trou noir en kilogrammes (unité SI).

i) Calculer (1) le rayon de Schwarzschild du trou noir, puis (2) sa densité moyenne.

j) À partir du Redshift de NCG1232, déterminer la distance entre nous (O) et NCG1232 (S). En déduire la distance entre O et le trou noir et celle entre le trou noir et S. *Exprimer toutes ces distances en Mpc puis en m.*

k) Calculer le rayon d'Einstein dans l'image de droite. *Donner le résultat en secondes d'arc.*

## Exercice 8: Température

- Quelle est la température du trou noir de Sgr A\*, dans le noyau de la Voie Lactée?
- En tenant compte de la température moyenne de l'univers actuel, pourquoi ce trou noir ne peut pas émettre de la radiation de Hawking ?
- Quelle devrait être la masse d'un trou noir pour que sa température soit comparable avec celle de l'univers actuel ? Et son rayon de Schwarzschild ?

## Exercice 9 : Temps d'évaporation

Lorsqu'on se limite uniquement à la physique Newtonienne, un trou noir est un objet qui accrète toujours et qui ne libère aucune forme d'énergie. Nous avons l'impression que toute information physique contenue dans ce qu'il avale est « perdue », sauf trois grandeurs physiques (indépendantes) qui définissent univoquement cet objet.

- Quelles sont ces trois grandeurs ?
- Expliquer quel est le phénomène à la base de l'évaporation d'un trou noir et pourquoi la physique newtonienne n'est pas suffisante pour l'expliquer.
- Déterminer l'ordre de grandeur du temps d'évaporation d'un trou noir de (I)  $M_{in} \sim 1\text{kg}$ , (II)  $M_{in} \sim M_{Terre}$  et (III)  $M_{in} \sim 10M_{Soleil}$ .
- Quelle devrait être la masse initiale d'un trou noir pour qu'il s'évapore en une durée de l'ordre de l'âge de l'Univers,  $t_e \sim 10^{10}$  années?

## Exercice 10 : Le trou noir du CERN

Le LHC (large hadrons collider), au CERN, peut accélérer des protons jusqu'à leur faire atteindre une énergie cinétique de  $E_k = 13\text{TeV}$ .

- Convertir cette énergie en Joules ;
- S'il était possible de convertir entièrement toute cette énergie cinétique en énergie de masse, quelle serait la masse de la particule ainsi créée ?
- Quels seraient le rayon de Schwarzschild et la densité d'un trou noir de telle masse ?
- Quelle serait l'estimation du temps d'évaporation d'un tel trou noir ?

Vidéo : le trou noir du CERN : [http://www.dailymotion.com/video/x7erd3\\_le-trou-noir-du-cern\\_tech](http://www.dailymotion.com/video/x7erd3_le-trou-noir-du-cern_tech)



# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

---

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
  - Série 2 : Expansion
  - Série 3 : Principe d'équivalence
  - Série 4 : Courbure
  - Série 5 : Lentille gravitationnelle
  - Série 6 : Trous noirs
  - Série 7 : Equations cosmologiques
  - Série 8 : Chronologie du Big Bang
  - Série 9 : Ondes Gravitationnelles
- 
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
  - Activité expérimentale 2 : La courbure du cône



**SwissMAP**

The Mathematics of Physics  
National Centre of Competence in Research



**UNIVERSITÉ  
DE GENÈVE**

Didactique de la physique

©Terms of use

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

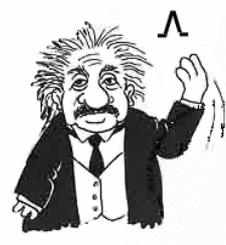
***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 7 : Equations cosmologiques***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

## Série 7 : Equations Cosmologiques

### Exercice 1 : La constante cosmologique d'Einstein

- a) Réécrire la première équation cosmologique dans un Univers dominé uniquement par la matière en explicitant le terme contenant la vitesse du facteur d'échelle  $\dot{a}^2(t)$ . Expliquer pourquoi aujourd'hui, au temps  $t = t_0$  ( $a_0 = a(t_0) = 1$ ), cette équation n'admet pas de solution statique.
- b) Au début du XX<sup>ème</sup> siècle l'idée que l'Univers ne soit pas statique était difficile à accepter. Pour cette raison, Einstein introduit un terme à la première équation cosmologique : la constante cosmologique  $\Lambda$ . Réécrire la première équation cosmologique pour l'Univers dominé par la matière, mais en ajoutant le terme  $\Lambda$ . Quelle devrait être la valeur de  $\Lambda$  aujourd'hui (au temps  $t_0$ ) pour que l'Univers soit statique ? Est-ce une valeur positive ou négative ? (Prendre pour la densité de matière aujourd'hui  $\rho_{m0} \approx 10^{-28} \text{ kg/m}^3$ ).
- c) Montrer que – même si aujourd'hui l'Univers était statique ( $\dot{a}(t_0) = 0$ ) – il serait instable : une valeur de la vitesse ultrapetite ( $\dot{a}(t_0) = \varepsilon \ll 1$ ) impliquerait une accélération  $\ddot{a}(t_0)$  non nulle. Qu'en déduire ? (Pour obtenir l'accélération du facteur d'échelle  $\ddot{a}(t)$ , dériver la première équation cosmologique par rapport au temps.)



### Exercice 2 : La bonne distance

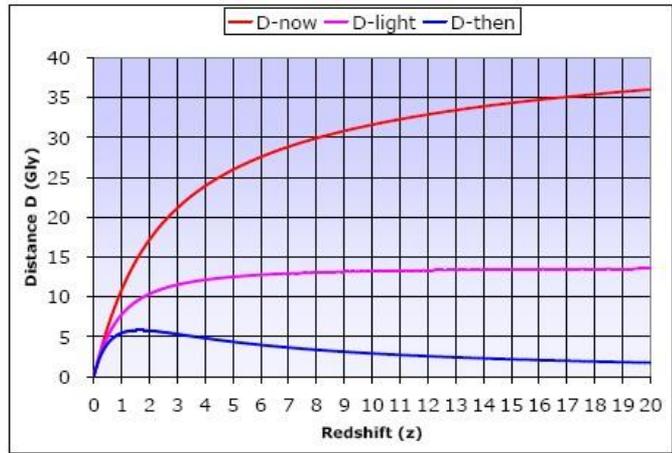
- a) Ecrire les formules de (1) la distance **comobile**  $D_0$ , (2) la distance **propre au moment de l'émission**  $D_{em}$  et (3) la distance **de traversée**  $D_T$  d'une même source avec redshift  $z_s$ .
- b) Cocher la bonne réponse en justifiant le choix effectué : la distance traversée<sup>1</sup>  $D_T$  est
- plus petite que  $D_{em}$
  - entre  $D_{em}$  et  $D_0$
  - plus grande que  $D_0$
- c) Intégrer chacune des formules écrites au point a), dans le cas où  $\Omega_m = 1$  et  $\Omega_\Lambda = 0$  et trouver quel est le comportement (la limite) en fonction de  $z_s$  lorsque  $z_s \rightarrow \infty$ .
- d) Les approximations faites au point c) sont-elles raisonnables pour les sources à haut redshift observées?
- e) Calculer la quantité  $D_T(z_e)/c$  obtenue au point c) pour  $z_s \rightarrow \infty$  ? Que représente t-elle ?

### Exercice 3 : Âge de l'Univers (numérique)

Utiliser les derniers résultats des mesures des paramètres  $H_0$ ,  $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$  ([https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model)) pour calculer l'âge de l'Univers à partir de la formule de la distance de traversée. Faire l'intégration de manière numérique en utilisant un langage de programmation adéquat (par exemple Python, Octave, Scilab).

### Exercice 4 : $D_{em}$ maximale

Le graphique ci contre représente, en fonction du redshift,  $D_0$  (« D-now », ligne plus haute, en rouge),  $D_T$  (« D-light », ligne du milieu, en rose), et  $D_{em}$  (« D-then », ligne du bas, en bleu) obtenues par l'intégration numérique avec  $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ ,  $\Omega_{\Lambda 0} = 0,7$  et  $\Omega_{m0} = 0,3$ . Si pour des petits  $z_S$  ces trois distances tendent à être les mêmes, l'écart entre elles devient de plus en plus grand pour des grands  $z_S$ , et elles commencent à se différencier avant  $z_S = 1$ . Comme on a déjà pu l'observer dans l'exercice 2,  $D_{em}$  tend à diminuer lorsque le redshift devient assez grand.

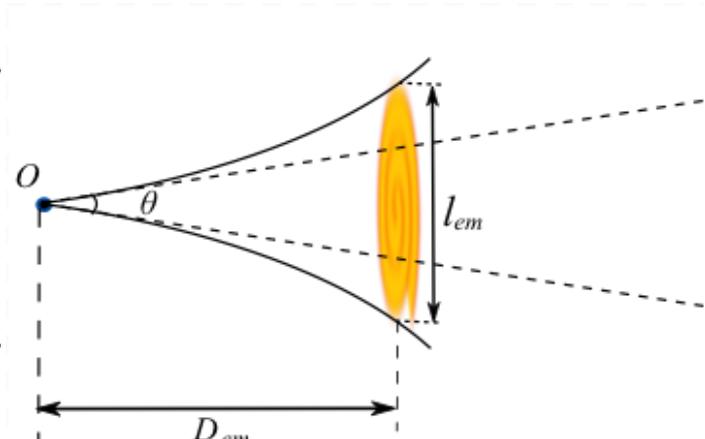
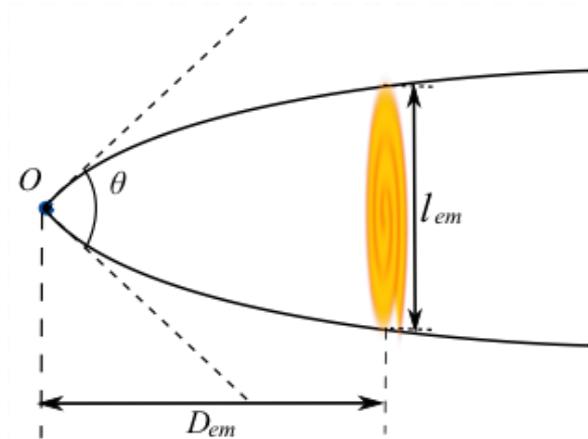


- Quelle explication physique peut-on donner à ce résultat ?
- En supposant un Univers uniquement de matière ( $\Omega_m = 1$ ) et en utilisant les résultats de l'exercice 2, déterminer à quel redshift la distance propre au moment de l'émission serait maximale.

### Exercice 5 : Distance de diamètre angulaire $D_A(z_S)$

La distance de diamètre angulaire  $D_A$  est la distance apparente d'une source déduite à partir de la mesure de son diamètre angulaire,  $\theta$ . Elle est utilisée dans les mesures des lentilles gravitationnelles ou de tailles des fluctuations du CMB.

- Avec quelle autre distance cosmologique coïncide  $D_A$  dans un Univers plat en expansion? Ecrire sa formule intégrale en fonction de  $z_S$  et des paramètres cosmologiques.
- Compléter les dessins ci-dessous pour expliquer pourquoi, dans un Univers dont la courbure n'est pas nulle,  $D_A$  ne coïncide pas avec  $D_{em}$  et spécifier dans quel cas  $D_A$  est plus grande ou plus petite que  $D_{em}$ .



## Exercice 6 : Distance de luminosité $D_L(z_s)$

De plus que les quatre distances cosmologiques déjà étudiées dans ce chapitre, il existe un autre type de distance mesurable: la **distance lumineuse**  $D_L$ . Elle est utilisée en cosmologie pour les sources dont on connaît la luminosité  $L$  (la puissance radiative, en W), appelées « chandelles standard » (par exemple les supernovae Ia, vues au chapitre 2), et en la comparant au flux  $f$  (c'est à dire la puissance radiative par unité de surface, en  $\text{W}/\text{m}^2$ ) reçu.

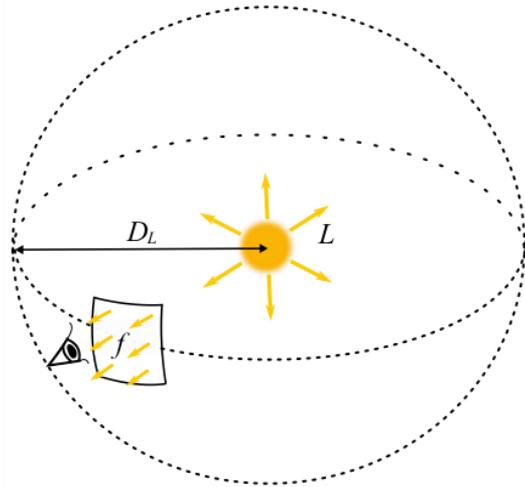
De manière générale, quand on se trouve à une distance  $R$  d'une source de luminosité  $L$ , le flux est

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2}. \quad (1)$$

De plus, nous pouvons exprimer le flux d'une source qu'irradie en fonction de sa température  $T$  en utilisant la loi de Stefan – Boltzmann (voir Annexe du cours) :

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2} = \sigma \cdot T^4, \quad (2)$$

où la constante de Stefan – Boltzmann vaut  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .



- Imaginons que l'Univers « arrête » son expansion au temps  $t_{em}$ , lorsque la lumière de la source est émise à une température  $T_{em}$ . Parmi les distances cosmologiques étudiées jusqu'à maintenant ( $D_T$ ,  $D_0$  ou  $D_{em}=D_A$ ), laquelle devrait-on utiliser dans la formule (2) ci-dessus (à la place du  $R$ ) ? Réécrire cette formule en remplaçant le  $R$  et le  $T$  adéquats.
- Puisque l'Univers est en expansion, nous recevons un flux d'énergie plus petit que si l'Univers avait été statique depuis l'émission, notamment à cause de la diminution de la température de la radiation: aujourd'hui nous mesurons une température  $T_0 < T_{em}$ , parce que la longueur d'onde a augmenté :  $\lambda_0 > \lambda_{em}$ . Ecrire la relation entre  $T_0$  et  $T_{em}$  à partir de celle entre  $\lambda_0$  et  $\lambda_{em}$  en utilisant la loi de Wien (voir Annexe du cours).
- Ecrire l'équation (2) dans l'Univers en expansion: en remplaçant  $T$  par  $T_0$  et  $R$  par la distance lumineuse  $D_L$ .
- Utiliser la formule écrite au point c) et la relation entre  $T_0$  et  $T_{em}$  pour exprimer  $D_L$  en fonction de  $D_{em}$  et du facteur d'échelle  $a_{em}$ .
- Dans l'équation obtenue au point d), remplacer  $D_{em}$  par son expression intégrale en fonction de  $z_s$  pour trouver la formule donnant  $D_L$  en fonction de  $z_s$ .

### Exercice 7 : $D_L$ dans un univers de matière

- a) Comparer  $D_L$  aux autres distances cosmologiques écrites au point a) : est-elle plus grande ou plus petite, pour un  $z_s$  donné? Comment peut on expliquer cela ?
- b) Calculer l'intégrale de la distance lumineuse de manière analytique dans le cas où  $\Omega_m = 1$  et  $\Omega_\Lambda = 0$  et trouver quel est son comportement en fonction de  $z_s$  lorsque  $z_s \rightarrow \infty$ .
- c) Calculer la même intégrale analytiquement dans le cas où  $\Omega_m = 0$  et  $\Omega_\Lambda = 1$  et trouver quel est son comportement en fonction de  $z_s$  lorsque  $z_s \rightarrow \infty$ .
- d) Quel est l'effet de la constante cosmologique  $\Omega_\Lambda$  sur la distance de luminosité ?

### Exercice 8 : Ecart entre les distances cosmologiques

Les expressions pour les cinq distances cosmologiques en fonction du redshift sont des intégrales qui ne peuvent pas être résolues analytiquement si on tient compte de tous les paramètres de densité. Toutefois, des programmes le font de manière numérique pour une source avec un redshift donné. Par exemple le premier sur le site suivant :



[https://ned.ipac.caltech.edu/help/cosmology\\_calc.html](https://ned.ipac.caltech.edu/help/cosmology_calc.html)

En utilisant ce programme donner les 5 distances cosmologiques pour des sources placées respectivement aux redshifts 0,2, 2, 20, 200. Utiliser les derniers résultats des mesures des paramètres  $H_0$ ,  $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$  ([https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model)).  
Que remarque-t-on ?

$z_s$	$D_L$	$D_0$	$D_T$	$D_A = D_{em}$
0,20				
2,0				
20				
200				

## Exercice 9 : (Numérique) L'énergie noire

- a) (Numérique) Utiliser les derniers résultats des mesures des paramètres  $H_0$ ,  $\Omega_m$  et  $\Omega_\Lambda$  ([https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model)) et un langage de programmation adéquat (par exemple Python, Octave ou Scilab) pour dessiner le graphique de  $D_L(z_s)$  en Mpc (possibilité de faire le graphique en échelle  $\log_{10}$ ).
- b) Dans le même graphique, dessiner les courbes des fonctions analytiques de  $D_L(z_s)$  obtenues dans les points b) et c) de l'exercice 7 (resp.  $D_L(z_s)$  pour  $\Omega_m = 1$  et  $D_L(z_s)$  pour  $\Omega_\Lambda = 1$ ).
- c) Dans le même graphique, dessiner les points représentant les mesures de  $D_L$  et  $z_s$  pour les 59 supernovae Ia obtenues en 1998 par l'équipe du Supernova Cosmology Project <http://supernova.lbl.gov/> :

n.	$D_L$ [Mpc]	$z_s$		n.	$D_L$ [Mpc]	$z_s$		n.	$D_L$ [Mpc]	$z_s$
0	3304	0,458		20	6166	0,828		40	2366	0,416
1	2168	0,354		21	3119	0,450		41	5297	0,830
2	1932	0,425		22	3062	0,430		42	129,4	0,030
3	1600	0,374		23	3565	0,580		43	243,2	0,05
4	2344	0,420		24	5675	0,763		44	119,1	0,026
5	2051	0,372		25	3090	0,526		45	351,6	0,075
6	2377	0,378		26	783,4	0,172		46	130,6	0,026
7	3119	0,453		27	4169	0,619		47	56,75	0,014
8	3357	0,465		28	5546	0,592		48	492,0	0,101
9	3999	0,498		29	3648	0,550		49	78,70	0,020
10	3266	0,655		30	883,1	0,180		50	155,6	0,036
11	2148	0,400		31	3664	0,374		51	241,0	0,045
12	3148	0,615		32	3034	0,472		52	198,6	0,043
13	2831	0,480		33	2366	0,430		53	95,94	0,018
14	2301	0,450		34	4227	0,657		54	326,6	0,079
15	2455	0,388		35	3963	0,612		55	520,0	0,088
16	3266	0,570		36	1706	0,320		56	322,10	0,063
17	3019	0,490		37	3597	0,579		57	335,7	0,071
18	2667	0,495		38	2667	0,450		58	233,3	0,052
19	3750	0,656		39	3006	0,581				

Source : <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9812133v1.pdf>

Dans le tableau ci-dessous nous avons converti la magnitude en distance lumineuse, car dans le papier original seulement les magnitudes des supernovae sont données.

- d) Qu'en déduire ?

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

---

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
  - Série 2 : Expansion
  - Série 3 : Principe d'équivalence
  - Série 4 : Courbure
  - Série 5 : Lentille gravitationnelle
  - Série 6 : Trous noirs
  - Série 7 : Equations cosmologiques
  - Série 8 : Chronologie du Big Bang
  - Série 9 : Ondes Gravitationnelles
- 
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
  - Activité expérimentale 2 : La courbure du cône

©Terms of use

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

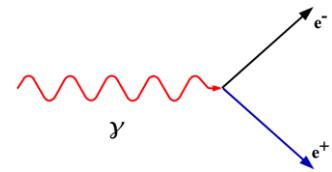
***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 8 : Chronologie du Big Bang***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

## Série 8 : Chronologie du Big Bang

### Exercice 1 : Production de paires

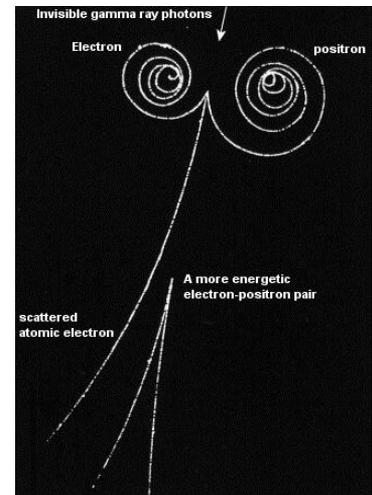
- a) Déterminer l'énergie minimale  $E$  d'un photon (la particule associée à une onde électromagnétique) pour qu'il puisse être converti en
- une paire électron – positron ( $E_{e/po}$ );
  - une paire proton – antiproton ( $E_{pr/a}$ ).



- b) Ces valeurs sont-elles en accord avec les fourchettes d'énergies correspondantes à l'époque des annihilations des particules respectives données dans la théorie ? Sait-on pourquoi les paires de particules – antiparticules ne se sont pas complètement annihilées (aujourd'hui on observe des protons et des électrons mais pas d'antiparticules)?
- c) En sachant que la relation entre l'énergie d'un photon  $E$  et la longueur d'onde associée  $\lambda$  est

$$E = hc/\lambda,$$

calculer la longueur d'onde correspondante aux énergies minimales pour produire chaque paire de particules trouvées au point a). Dans chaque cas, déterminer de quel type de radiation s'agit.



Source : <https://universe-review.ca/F15-particle02.htm>

N. B. La longueur d'onde associée à l'énergie de masse d'une particule, divisée par  $2\pi$  s'appelle **longueur d'onde de De Broglie** de la particule, et est très utilisée en physique des particules :  $D = \lambda / 2\pi$ .

- d) Pourquoi, même si son énergie le permettrait, un photon ne peut pas être converti en paire proton – neutron ?

### Exercice 2 : Energie potentielle électrique

- a) Au chapitre 6 nous avons obtenu la formule de l'énergie potentielle *gravitationnelle* d'un système de deux masses sphériques,  $m_1$  et  $m_2$ , dont les centres sont situés à une distance  $r$ . Réécrire cette formule. Quel est le signe de cette énergie ?
- b) En s'inspirant de l'analogie entre la loi de Gravitation Universelle et la loi de Coulomb, écrire une formule semblable à celle écrite au point a) donnant l'énergie potentielle *électrique* de deux charges  $q_1$  et  $q_2$ , dont les centres sont à une distance  $r$ . Quel est le signe de cette énergie ?
- c) Utiliser la formule écrite au point b) et les données dans l'Annexe du cours pour calculer l'énergie potentielle électrique d'un proton et un électron dans un atome d'hydrogène.
- d) Sans faire de calculs, déterminer quelle serait cette énergie si au lieu d'avoir un système proton – électron, on avait un système proton – proton, à la même distance.

### Exercice 3 : Température à la recombinaison

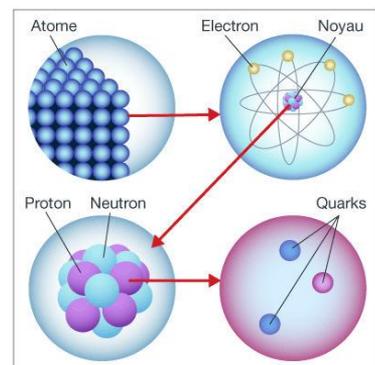
Imaginons d'avoir un plasma (un gaz formé par de particules chargées) de protons et d'électrons.

- Expliquer ce que signifie qu'un ensemble d'un grand nombre de particules est en « équilibre thermique », et pourquoi l'Univers primordial peut être considéré comme un plasma en équilibre thermique.
- En utilisant la relation entre la température et l'énergie moyenne des particules d'un plasma (voir l'Annexe du cours) et le résultat du point c) de l'exercice 2, calculer la température minimale qu'un plasma doit avoir pour que les atomes soient ionisés.
- À quelle époque de l'histoire thermique de l'Univers cette température correspond ?

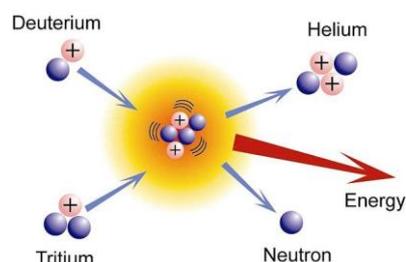
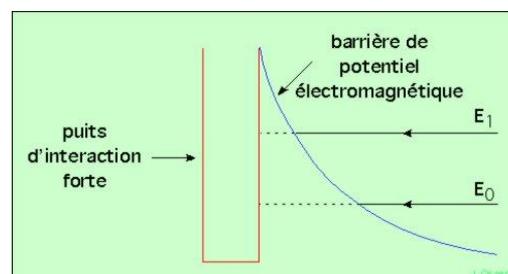
### Exercice 4 : Interaction Forte

L'interaction forte est une parmi les 4 interactions fondamentales de la nature. Elle n'affecte pas directement notre vie quotidienne car elle ne devient significative – puis dominante – qu'à partir de très petites échelles, de l'ordre de  $10^{-15}$ m (1fm).

- Quel(s) objet(s) connaissez – vous à cette échelle ?
- Sur quelles particules l'interaction forte agit – elle ?
- Est-ce que les atomes seraient stables, s'il n'existait pas l'interaction forte ?
- Calculer l'ordre de grandeur (ODG) de l'énergie potentielle électrique de deux protons qui se rapprochent jusqu'à la distance où l'interaction forte devient plus grande que celle électrique :  $10^{-15}$ m.



L'ODG trouvé au point d) correspond à l'énergie minimale que des protons devraient avoir pour fusionner et former un noyau d'hélium (on parle de **fusion nucléaire**), s'ils étaient de particules classiques (sans tenir compte des effets quantiques). En d'autres mots, la fusion nucléaire est un processus « difficile » à des températures ordinaires, car il faut fournir une très grande énergie aux protons pour leur permettre de vaincre la « **barrière Coulombienne** » de l'énergie potentielle électrique, qui a la tendance à repousser deux charges du même signe. Mais, une fois passée cette barrière, la fusion nucléaire libère énormément d'énergie, car le puits d'énergie potentielle (qui devient négative) de l'interaction forte, après l'échelle de  $1\text{fm} = 10^{-15}\text{m}$ , est très profond.



## Exercice 5 : Température associée à la barrière coulombienne

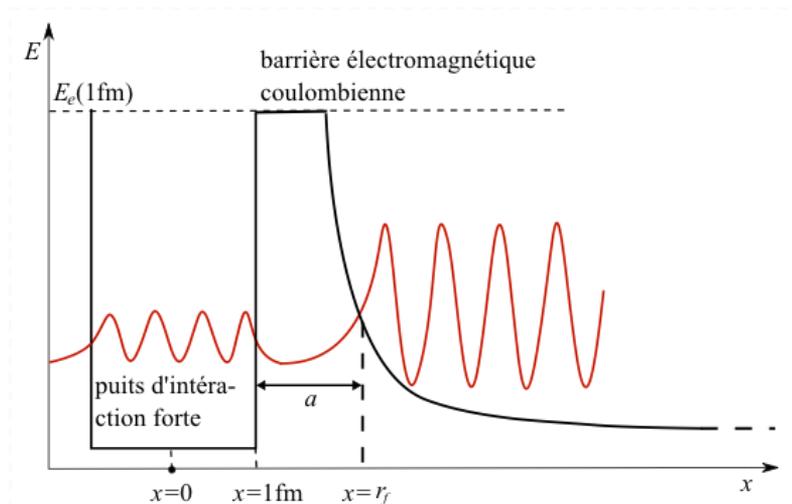
Imaginons d'avoir un plasma de protons (noyaux d'hydrogène). En utilisant la relation entre la température et l'énergie moyenne des particules d'un gaz de protons (voir l'Annexe du cours), calculer la température minimale du plasma primordial pour qu'un nombre significatif de ses protons puisse passer la « barrière coulombienne » (énergétique), trouvée dans l'exercice précédent. Quel est l'ODG de cette température ?

## Exercice 6 : Température de fusion nucléaire et effet tunnel quantique

En réalité, la fusion nucléaire est possible à des températures plusieurs ODG plus basses que celles obtenues dans l'exercice 5, où nous avons considéré les protons comme de corpuscules qui doivent dépasser un potentiel (comme une balle qui doit passer au delà d'un mur).

Mais dans le monde microscopique subatomique, il n'a pas de sens de considérer les particules comme de corpuscules ponctuels, dont on peut théoriquement connaître la position, la vitesse, l'accélération et l'énergie à un instant arbitrairement précis. En réalité, le concept de « corps matériel », solide, existe seulement à l'échelle macroscopique.

- Lire attentivement l'Annexe 3 du cours sur l'« effet tunnel quantique ».
- En sachant que la température de fusion à l'intérieur du Soleil est de 15 millions de degrés Kelvin, déterminer quelle est l'énergie des protons qui sont fusionnés en noyaux d'hélium par effet tunnel.
- Quelle est la distance moyenne entre les protons à cette énergie,  $r_f$  ?
- En déduire la taille de la « barrière coulombienne », la longueur  $a$  du dessin ci-contre. Que peut on conclure ?



## Exercice 7 : Energie d'unification de la gravitation et l'électromagnétisme

En comparant les forces électromagnétique et gravitationnelle entre un électron et un proton dans un atome d'hydrogène, mais aussi entre la Terre et la Lune (si on pouvait leur arracher tous les électrons), il est possible de constater que l'interaction gravitationnelle est beaucoup plus faible que celle électromagnétique (cf. série 1).

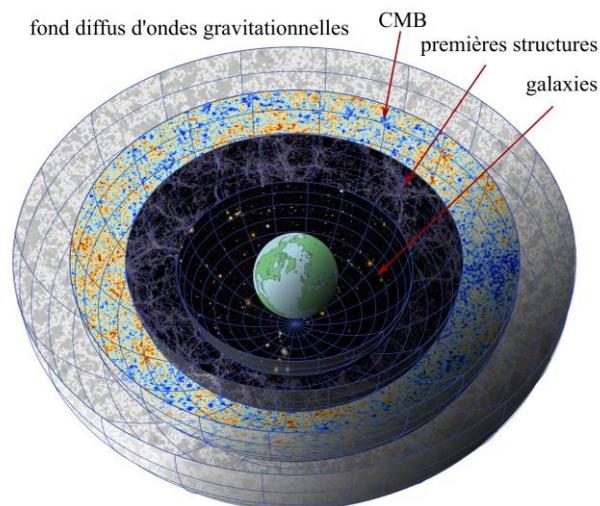
- Supposons maintenant d'avoir deux particules identiques, de même charge  $q_1=q_2=q$  inconnue, et même masse  $m_1=m_2=m$ , aussi inconnue. Quel doit être le rapport  $m/q$  pour que l'interaction gravitationnelle entre ces deux particules soit de même intensité que celle électromagnétique ?
- Quelle doit être la masse  $m$  que les particules devraient avoir si leur charge était égale à la charge fondamentale (celle du proton et de l'électron,  $q = e = 1,02 \cdot 10^{-19} \text{C}$ ) pour que l'interaction gravitationnelle et l'interaction électromagnétique entre elles soit de même intensité ?
- À quelle énergie correspond cette masse ? Donner la réponse en J, puis en eV.

Cela signifie que si une charge élémentaire possède une énergie (cinétique et/ou de masse) de cet ordre, alors son interaction gravitationnelle est comparable à celle électromagnétique, donc aussi aux interactions nucléaires, puisque – à ces échelles d'énergie – les interactions électrique et nucléaires sont déjà unifiées. Si l'énergie de la particule est plus petite, alors la gravitation est plus faible que les autres interactions. C'est à partir de ce seuil d'énergie que la gravitation se découple du plasma primordial.

- Le résultat obtenu au point c) est-il en accord avec la valeur donnée dans la théorie pour le découplage de la gravitation? Commenter ce résultat.

Nous rappelons qu'au moment du découplage électromagnétique du plasma primordial (380000 ans après le Big Bang), les ondes correspondantes (électromagnétiques) ont pu s'échapper et voyager librement dans l'espace sous la forme de fond diffus cosmologique (CMB) : à cette époque l'Univers est devenu « transparent » aux ondes électromagnétiques. Aujourd'hui, l'analyse de cette radiation fossile (une « photo de l'Univers bébé ») nous permet d'extraire des informations de l'Univers au moment du découplage (électromagnétique), environ 380000 après le Big Bang.

De la même manière, au moment du découplage gravitationnel, les ondes correspondantes à cette interaction – les ondes gravitationnelles – ont cessé d'interagir avec le plasma primordial et ont pu voyager librement : l'Univers est devenu transparent à la radiation gravitationnelle. La détection de ce type d'ondes est difficile, à cause de leur faiblesse (due à la nature même de la gravitation). Mais, pour cette même raison, une détection du fond diffus cosmologique d'ondes gravitationnelles nous permettrait d'établir un portrait de l'Univers à l'âge du découplage



gravitationnel :  $10^{-43}$ s après le Big Bang !

### Exercice 8 : Vrai ou faux ?

Justifier chaque réponse.

- 7) La densité d'énergie sous forme de radiation a été dominante pour des redshifts  $z < 10$ .
- 8) Dans l'équation de Friedmann, le terme de la constante cosmologique domine l'expansion de l'univers actuellement.
- 9) Avec l'expansion, la densité d'énergie des radiations diminue moins rapidement que la densité de matière.
- 10) La densité de l'énergie du vide reste constante malgré l'expansion de l'Univers.
- 11) L'Univers actuel est rempli de toutes les particules et les antiparticules produites lors du Big Bang.
- 12) La nucléosynthèse primordiale a eu lieu après la recombinaison : des atomes d'hydrogène et/ou deutérium ont fusionné pour donner des atomes avec un nombre atomique plus élevé.
- 13) Lors de la nucléosynthèse primordiale, tous les éléments plus lourds que l'hydrogène existants aujourd'hui ont été produits.
- 14) La plupart de l'hélium présent aujourd'hui dans l'Univers a été produit dans les étoiles.
- 15) L'abondance d'hélium observée est une confirmation du modèle du Big Bang.
- 16) Toute la matière, baryonique ou pas, s'est découplée du plasma primordial au même temps, après la recombinaison.
- 17) On appelle « âges sombres » l'époque de l'évolution de l'Univers où la radiation électromagnétique est négligeable.
- 18) Les premières étoiles formées après le Big Bang étaient beaucoup plus massives que les étoiles qu'on observe actuellement.
- 19) La réionisation a eu lieu après le découplage à cause d'une brève phase de contraction de l'Univers.

# Cosmologie Moderne et Relativité Générale

Activités pour les élèves du Secondaire II

---

Alice Gasparini, Andreas Müller

- Série 1 : Grandeurs
- Série 2 : Expansion
- Série 3 : Principe d'équivalence
- Série 4 : Courbure
- Série 5 : Lentille gravitationnelle
- Série 6 : Trous noirs
- Série 7 : Equations cosmologiques
- Série 8 : Chronologie du Big Bang
- Série 9 : Ondes Gravitationnelles

- 
- Activité expérimentale 1 : L'effet Doppler cosmologique
  - Activité expérimentale 2 : La courbure du cône



**SwissMAP**

The Mathematics of Physics  
National Centre of Competence in Research



**UNIVERSITÉ  
DE GENÈVE**

Didactique de la physique

©*Terms of use*

You are free to copy and redistribute the present material, as well as to adapt it and or build upon it in any medium or format under the following terms:

- You must give appropriate credit, provide a link to the original, and indicate if changes were made.
- You may not use the material for commercial purposes.
- If you adapt the material or build on, you must distribute your contribution under the same condition as this original

Suggested citation:

A. Gasparini (UniGE, SwissMAP) et A. Müller (UniGE, Didactique de la Physique)

***Cosmologie Moderne et Relativité Générale : Activités pour les élèves du Secondaire II, Série 9 Ondes Gravitationnelles***

(NCCR SwissMAP/Education, Genève 2016) ; <http://www.nccr-swissmap.ch/education>

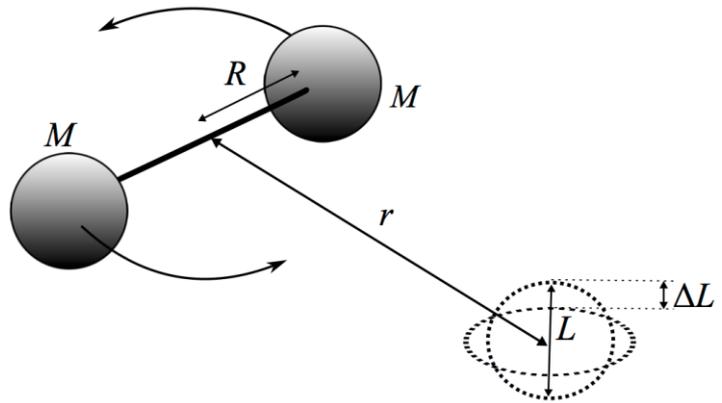
## Série 9 : Ondes Gravitationnelles

**Rappel :** Pour une onde périodique où  $f$  est la fréquence,  $\lambda$  la longueur d'onde,  $c$  la vitesse,  $T$  la période,  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation du mouvement circulaire uniforme associé,

$$f = 1/T; \quad \lambda \cdot f = \lambda / T = c \quad \omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot f$$

### Exercice 1 : L'altère

Une onde gravitationnelle est générée par un système binaire de deux masses  $M$  identiques, en rotation à une distance  $d = 2R$  l'une de l'autre. L'onde se propage et atteint un anneau de matière « test », de diamètre  $L$ , situé à une distance  $r$  du centre de rotation. L'onde voyage dans la direction perpendiculaire au plan du cercle et produit une déformation relative sur celui-ci,  $\Delta L/L = h$  dont la formule est la suivante :



$$h = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2G}{c^4} \cdot \frac{M}{r} \cdot \omega^2 R^2.$$

$\omega$  est la vitesse angulaire de rotation des masses autour de leur centre :  $\omega = 2\pi/T = 2\pi \cdot f$ .

- Exprimer cette formule en fonction du rayon de Schwarzschild de  $M$ .
- Expliquer pourquoi cette quantité est toujours plus petite que 1.
- Calculer  $h$  pour des ondes générées par la rotation d'un altère terrestre composé de deux masses d'une tonne chacune à une distance  $d = 2\text{m}$ , et à une fréquence  $f = 1\text{kHz}$ , sur un corps à  $r = 10\text{m}$  de distance.

### Exercice 2 : Une déformation facilement mesurable ?

Assumons qu'il existe un système binaire tournant à une vitesse proche de celle de la lumière ( $v = \omega R \sim c$ ). Ceci est possible uniquement lorsque les deux masses ont une distance comparable à leur rayon de Schwarzschild ( $R \sim R_s$ ).

- Dans ce cas, quel est l'ordre de grandeur du rapport  $M/r$  pour avoir une déformation relative de  $10^{-3}$ , plus facilement mesurable (un cercle d'1m subirait une déformation de l'ordre du millimètre) ?
- Quels objets astrophysiques existent ayant ce rapport ?

### Exercice 3 : Vitesse de rotation relativiste : pour quels objets ?

Dans l'exercice 1 nous avons vu que l'amplitude d'une onde gravitationnelle générée par un système binaire symétrique a une forte dépendance (au carré) du rapport entre la vitesse de rotation du système et  $c$  :  $h \propto \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2$ . Considérons maintenant un système lié gravitationnellement, formé d'une petite masse  $m$  tournant autour d'une grande masse  $M$ , avec  $m \ll M$ , à une distance  $R$ .

- a) En utilisant la deuxième loi de Newton appliquée au mouvement circulaire uniforme de  $m$ , démontrer que si la vitesse de rotation de  $m$  approche celle de la lumière, alors le rayon de sa trajectoire circulaire  $R$  doit approcher la moitié du rayon de Schwarzschild de la masse  $M$ :

$$v \approx c \Rightarrow R \approx \frac{R_s}{2} = \frac{GM}{c^2}.$$

- b) Quels objets ont la propriété d'avoir toute leur masse contenue à l'intérieur de leur rayon de Schwarzschild?

#### Exercice 4 : Fréquence et masse génératrice

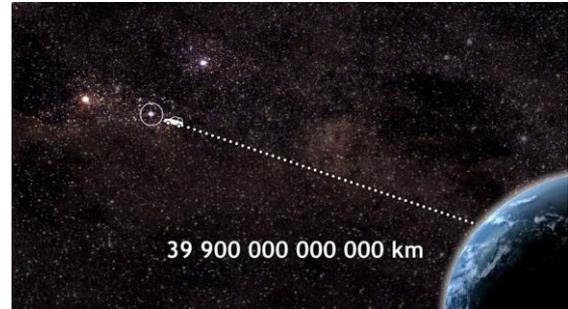
La fréquence caractéristique d'une onde gravitationnelle émise par un système binaire est la même que celle de rotation du système et dépend de la taille de ses masses  $M$  (qu'on suppose égales par simplicité). Pour que la radiation soit la plus intense possible, ces masses doivent tourner à une vitesse presque égale à la vitesse de la lumière ( $v = \omega R \sim c$ ). Pour cela, elles doivent orbiter à une distance de l'ordre de leur rayon de Schwarzschild (2 ou 3 fois sa taille) et donc être très compactes : par exemple de trous noirs (ou des objets de densité proche à celle des trous noirs).

- a) En utilisant la relation entre la masse et le rayon de Schwarzschild d'un corps, écrire une formule donnant l'ordre de grandeur de la vitesse angulaire du système  $\omega$  en fonction de la masse des ses composantes (en rad/s), puis celle de la fréquence  $f$  (en Hz).
- b) Déterminer quelle est la fréquence caractéristique d'un système de trous noirs stellaires, d'une masse de l'ordre d'une dizaine de masses solaires.
- c) Faire le même calcul pour un système de trous noirs supermassifs (noyaux des galaxies), de l'ordre du million de masses solaires.

## Exercice 5 : Variation de la distance d'une étoile

Parmi les ondes gravitationnelles les plus intenses qui pourraient provenir d'objets présents dans notre galaxie ( $r \sim \text{kpc}$ ) il y a celles dues à la phase finale du mouvement rotatoire de deux trous noirs d'une masse solaire chacun, juste avant leur collision. Dans cette phase les trous noirs orbitent à une distance de l'ordre de leur rayon de Schwarzschild, donc à une vitesse orbitale proche de celle de la lumière ( $v = \omega R \sim c$ ).

- Estimer quelle serait  $h$  dans ce cas très optimiste.
- Quelle serait la variation  $\Delta L$  de la distance entre la Terre et l'étoile la plus proche, Proxima Centauri, causée par le passage d'une telle onde?

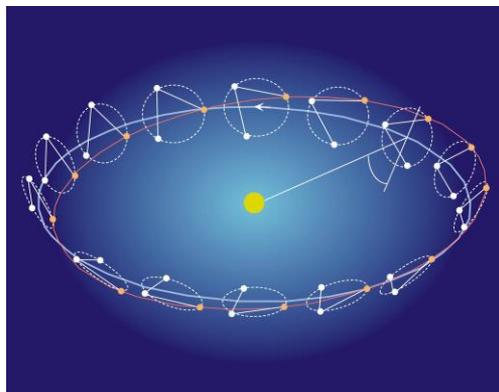


Source : <http://www.futura-sciences.com>

## Exercice 6 : Fréquence et taille du détecteur

Chaque instrument possède une bande de fréquences pour lesquelles il est mieux adapté à la détection d'ondes gravitationnelles, en fonction de sa taille  $L$ . En effet, si la période d'oscillation d'une onde  $T$  est égale ou plus petite que la durée employée par la lumière pour traverser l'instrument,  $t$ , plusieurs contributions à la déformation  $\Delta L$  de signe différent se superposent et s'annulent. On considère qu'un détecteur est assez efficace lorsque la durée de sa traversée par la lumière  $t$  est au moins 10 fois plus petite que la période de l'onde qu'on souhaite détecter,  $T : 0,1T \sim t \ll T$ .

- En utilisant les considérations ci-dessus, écrire une formule donnant la fréquence maximale qu'une onde peut avoir pour qu'elle soit détectable par un instrument de taille  $L$ .
- Quelle doit être  $L$  pour détecter une onde entre une dizaine de Hz et un kHz? À quels objets astrophysiques correspondent ces valeurs de fréquences? Existe-t-il des détecteurs d'ondes gravitationnelles de cette taille?
- L'interféromètre spatiale LISA, qui sera lancé en orbite héliocentrique dans les années 2030, possède des bras de 5 millions de km. Quelles fréquences pourra-t-il détecter? À quels objets astrophysiques correspondent ces valeurs de fréquence?



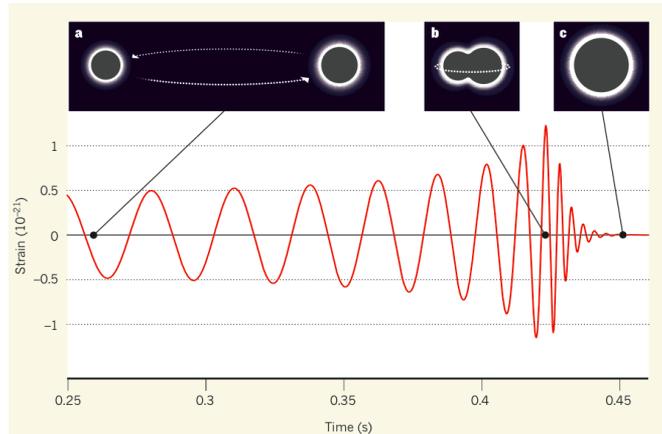
Crédit image : NASA <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:LISA-orbit.jpg>

## Exercice 7 : GW091415

La première détection historique d'onde gravitationnelle a été faite le 14 septembre 2015 (GW091415) par les deux interféromètres LIGO aux Etats Unis. Il s'agit de la collision entre deux trous noirs de masses  $M_1 = 29M_{\text{Soleil}}$  et  $M_2 = 36M_{\text{Soleil}}$ , à une distance  $r = 400\text{Mpc}$  de la Terre. Le trou noir obtenu après la collision est de 62 masses solaires.

On a pu observer

- le signal des dernières 8 périodes du mouvement de rotation de deux trous noirs, dans une bande de fréquence entre les 35 et les 150Hz,
- la collision à 150Hz,
- la phase de « ringdown », pendant laquelle le trou noir final, de forme asymétrique, irradie des ondes pour retrouver une forme sphérique. La durée totale du signal a été de 0,45s.



Crédit: 2016 Macmillan Publishers Limited, Nature 17306

Une reconstruction artistique de cet événement peut être visualisée sur le site de la NASA :



Source: [http://www.nasa.gov/mov/116648main\\_CollidingWdwarves.mov](http://www.nasa.gov/mov/116648main_CollidingWdwarves.mov)

- À partir de la distance, déterminer le redshift correspondant. Il y a combien d'année cette collision s'est vérifiée ?
- Quelle est la variation de masse du système lors de la collision ?
- En assumant que toute cette masse a été convertie en énergie radiative, quelle est l'énergie irradiée lors de cette collision ? Donner la réponse en  $M_{\text{Soleil}} \cdot c^2$  et en J.
- Quelle est la puissance moyenne irradiée pendant la durée observée ? Existe-t-il des phénomènes connus avec une puissance comparable ?
- Calculer le rendement de cette collision :  $\eta = \Delta E_{\text{irradiée}} / E_{\text{tot}}$ .

La réaction de fusion nucléaire la plus énergétique est la suivante :  ${}^2\text{H} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{proton} + 18,4\text{MeV}$ . Calculer son rendement énergétique et le comparer avec celui de la collision GW091415. La masse du proton est  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg} = 938\text{MeV}/c^2$ .