

Introduzione alla cosmologia e alla relatività generale

Esercizi e attività

Alice Gasparini, Andreas Müller, Nicolas Cretton

Indice

1	Grandezze	2
2	Espansione	11
3	Basi di relatività generale	21
4	Lenti gravitazionali	31
5	Buchi neri	40
6	Equazioni cosmologiche	58
7	Cronologia del Big Bang	70
8	Onde gravitazionali	77

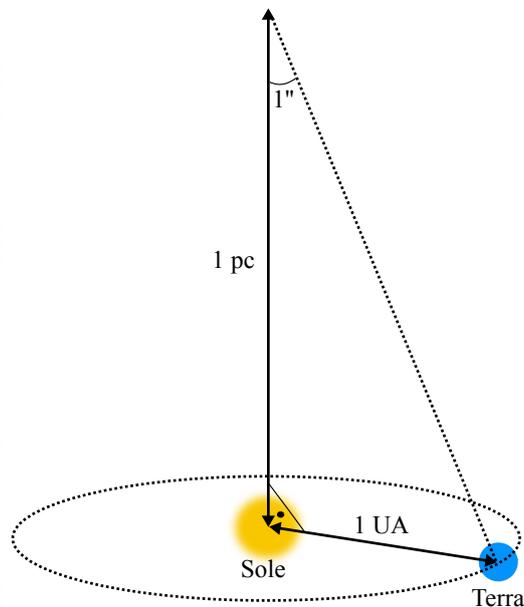
1 Grandezze

Esercizio 1: L'anno luce

- Definire che cos'è un *anno luce* (al).
- Sapendo che la luce si propaga nel vuoto con una velocità di $c = 299'792'458$ m/s, esprimete 1 al in metri. Esprimete questo risultato con una sola cifra significativa (facile da ricordare).
- “Guardare lontano significa guardare nel passato”, perché? Osservando le galassie sempre più lontane, la proporzione di galassie irregolari aumenta rispetto alle galassie a spirale. Come si spiega questa osservazione? Formulate alcune ipotesi.

Esercizio 2: Il parsec

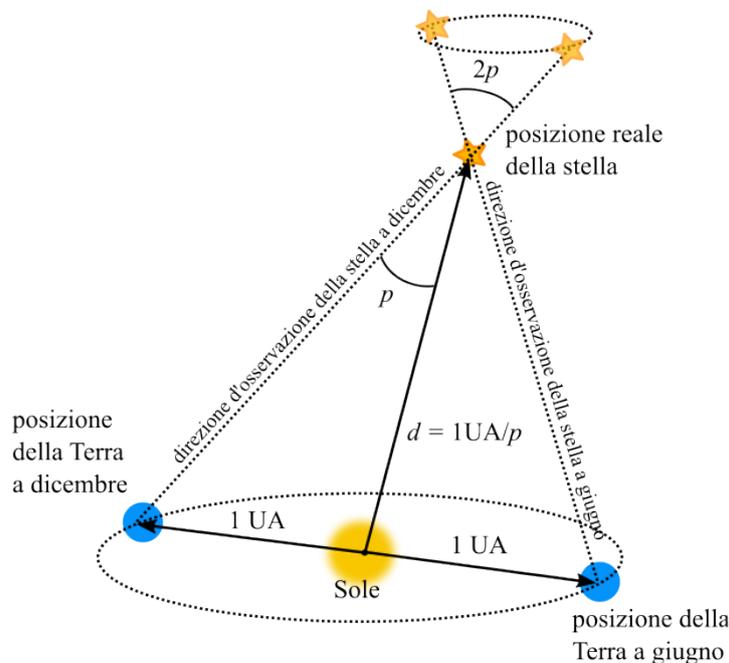
Il **parsec**, abbreviato in **pc**, è l'unità di misura delle distanze più usata in astronomia. Si basa sulla parallasse trigonometrica, il metodo più antico e affidabile per misurare le distanze stellari. Consideriamo il triangolo rettangolo nella figura accanto, che ha come primo lato dell'angolo retto l'*unità astronomica (UA)*, ossia il raggio dell'orbita terrestre attorno al Sole, opposto ad un angolo di $1.0'' (= 1^\circ/3600)$. Il parsec è definito come il secondo lato dell'angolo retto di questo triangolo.



- a) Sapendo che $1 \text{ UA} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$, esprimete 1 pc in m. Il disegno qui sotto mostra come la posizione apparente di una stella nel cielo cambia a causa della rotazione della Terra attorno al Sole. L'angolo p è chiamato **parallasse** della stella.
- b) Determinare la formula che esprime la distanza d tra una stella e il Sole (in pc) in funzione della sua parallasse in secondi d'arco: $d(p)$.

Attenzione: più una stella è lontana, più piccolo è l'angolo di parallasse p . Poiché non esiste una stella più vicina di un parsec, p è sempre più piccolo di 1° , e possiamo supporre

- 1) che la distanza Terra - stella corrisponda alla distanza Sole - stella, d ,
- 2) che $\tan(p) \approx p$.

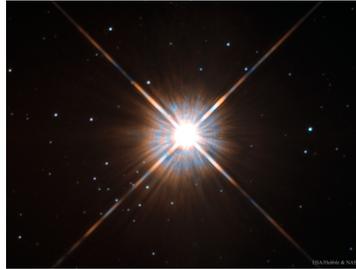


- c) La stella più vicina, Proxima Centauri, si trova a 4,23 al dal Sistema Solare: qual è la sua distanza in pc? E la sua parallasse?
- d) Se l'incertezza sulla misura della parallasse di una sorgente è dell'ordine di $0,001''$, qual è l'ordine di grandezza della distanza massima che possiamo stimare con questo metodo? A cosa corrisponde questo ordine di grandezza?
- e) Conoscete metodi per determinare le distanze di oggetti più lontani?

Video distanze ODG: <http://apod.nasa.gov/apod/ap150324.html>

Esercizio 3: Quante stelle?

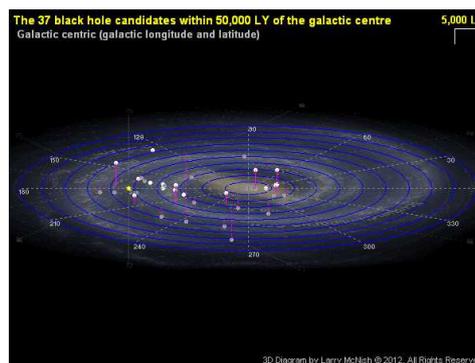
Dalle dimensioni della Via Lattea e dalla distanza media tra le stelle del suo disco, stimare il numero di stelle che la compongono, assumendo che la parte luminosa della Via Lattea sia un cilindro di spessore $h \approx 0,3$ kpc.



Proxima Centauri è una piccola stella rossa, visibile solo con un telescopio. Fa parte del sistema stellare "Alpha Centauri", visibile dall'emisfero sud, la cui stella più luminosa è simile al Sole. Fonte: <http://apod.nasa.gov/apod/ap160118.html>

Esercizio 4: Distanza media tra i buchi neri della Galassia

Si stima che la Via Lattea contenga circa un centinaio di milioni di buchi neri stellari, anche nel suo alone¹. Da queste informazioni, stimare l'ordine di grandezza (ODG) della distanza media tra i buchi neri stellari nella Via Lattea.



Distribuzione delle sorgenti che potrebbero essere buchi neri entro 50'000 al dal centro galattico. Fonte: <https://calgary.rasc.ca/blackholes.htm>.

¹Fonte: A. Barrau, *Trous noirs et espace-temps*, Bayard (2022).

Esercizio 5: Densità luminose medie

- a) Utilizzando un formulario di fisica (o cercando su internet), calcolate la densità media del Sole, della Terra e poi del Sistema Solare (in notazione scientifica e in unità SI, con un numero rilevante di cifre significative).
- b) Gli studi delle stelle vicine mostrano che l'insieme delle stelle visibili ha in media un rapporto massa/luminosità cinque volte superiore a quello del Sole²

$$\frac{M_{\text{lum}}}{L_{\text{lum}}} = 5 \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$$

dove M_{\odot} e L_{\odot} rappresentano rispettivamente la massa e la luminosità del Sole. La luminosità della Galassia è $L_{\text{Gal}} \approx 2 \cdot 10^{11} L_{\odot}$, e il suo raggio, tenendo conto solo della materia luminosa, è di circa 15 kpc. Stimare la massa di materia luminosa della Via Lattea, $M_{\text{lum Gal}}$, e poi la sua densità luminosa media, $\rho_{\text{lum Gal}}$, (risultati in notazione scientifica e in unità SI, con un numero rilevante di cifre significative).

- c) Si conta una media di 5 galassie per ogni porzione cubica di universo con 10 Mpc di lato. Supponendo che la massa luminosa della Via Lattea sia rappresentativa delle masse luminose medie di tutte le galassie, si deduce la densità luminosa media dell'universo. Esprimate questo risultato in M_{\odot}/Mpc^3 e in kg/m^3 , in notazione scientifica. Qual è il suo ordine di grandezza? Questo risultato concorda con il valore dato nel corso?
- d) Convertite questa densità in numero di atomi di idrogeno per metro cubo.

²<http://roffet.com/documents/sciences/mise-en-evidence-de-la-masse-cachee/i/>

Esercizio 6: Probabilità di collisione

L'immagine a destra è stata creata dai dati di una simulazione della NASA, che indicano che la Via Lattea e Andromeda si stanno avvicinando ed entreranno in collisione tra circa quattro miliardi di anni. Questa è una ricostruzione di come il cielo potrebbe apparirci dalla Terra in quel momento.



Fonte: http://www.nasa.gov/mission_pages/hubble/science/milky-way-collide.html (NASA).

Video della simulazione della collisione tra la Via Lattea e Andromeda:

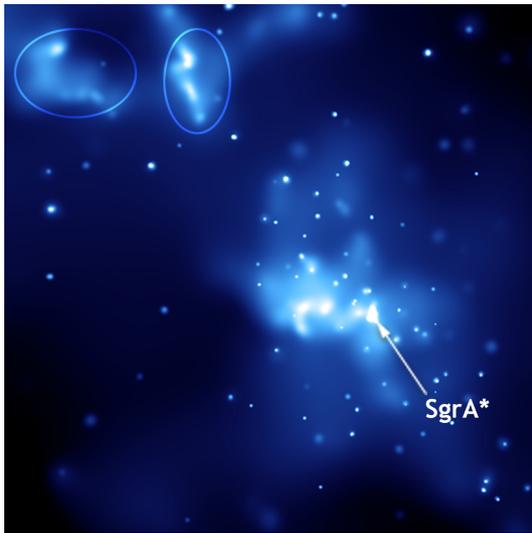
https://www.youtube.com/watch?v=kvyep_bi4bc

Possiamo considerare il disco luminoso di Andromeda come una superficie circolare di raggio $R \approx 30$ kpc, contenente circa 400 miliardi di stelle. Supponiamo che il raggio medio delle stelle sia uguale a quello del Sole: $r \approx 10 \cdot R_{\odot}$.

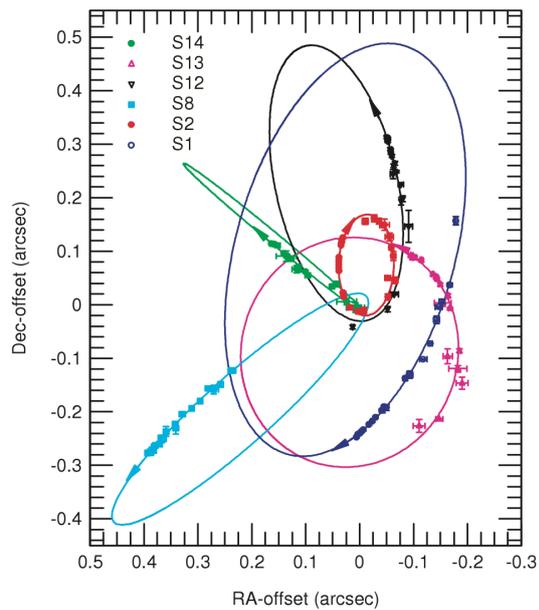
- Spiegate perché le collisioni tra galassie sono abbastanza frequenti, mentre le collisioni tra le stelle di due galassie in collisione sono rare.
- Stimate la percentuale di superficie occupata dalle stelle di Andromeda rispetto alla superficie totale occupata dal disco galattico. Questa percentuale corrisponde alla probabilità che una stella della Via Lattea (ad esempio il Sole) si scontri con una stella di Andromeda durante la collisione tra queste due galassie.
- Qual è l'ordine di grandezza del numero totale di collisioni stellari nella collisione tra Andromeda e la Via Lattea?

Esercizio 7: L'orbita di S2

La figura qui a fianco mostra un'immagine di Sagittario A* (Sgr A*), la sorgente radio compatta al centro della Via Lattea. Essa è stata scattata con un telescopio a raggi X della NASA. Le immagini nelle ellissi sono echi, riflessi della radiazione X sulle nubi vicine. Studiando il movimento di alcune stelle intorno a questa sorgente, gli astronomi hanno potuto dedurre la presenza di un buco nero supermassivo in questo punto, così come in tutte le grandi galassie a spirale.



Fonte: NASA, Wikipedia



Fonte: Eisenhauer et al., 2005, ApJ 628, 246

L'immagine a destra mostra le orbite di sei stelle intorno a Sgr A*. La stella S2, di cui abbiamo potuto seguire l'intera orbita dal 1995 al 2010, ha un perielio (la distanza minima da Sgr A* nella sua orbita) di 120 UA e un periodo di 15 anni. Per semplificare, consideriamo l'orbita di S2 come un cerchio di raggio r pari a 1000 UA (circa dieci volte più grande del suo perielio).

- Con questa approssimazione, stimate la velocità scalare media di S2 durante un periodo. Fornite il risultato in unità del SI.
- Utilizzando un formulario di fisica (o cercando su internet), calcolate la distanza percorsa da Nettuno durante un'orbita completa intorno al Sole (utilizzare l'approssimazione dell'orbita circolare).
- Confrontate le lunghezze stimate delle orbite S2 e di Nettuno calcolando il loro rapporto.

- d) Calcolate la velocità scalare media di Nettuno su un'orbita completa intorno al Sole.
- e) Confrontate le velocità scalari medie di S2 e di Nettuno calcolando il loro rapporto.

A questo indirizzo è possibile visualizzare una simulazione dell'orbita di S2:

<https://phys.org/news/2017-08-stars-orbiting-supermassive-black-hole.html#jCp>

Esercizio 8: Confronto tra le interazioni gravitazionali ed elettriche

Prima parte:

Secondo il modello di Bohr, l'elettrone nell'atomo di idrogeno ruota intorno al protone³ lungo un'orbita di raggio $r = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m.

- a) Calcolate l'intensità della forza di attrazione gravitazionale elettrone - protone. Poi, nello stesso atomo, calcolate l'intensità della forza elettrica di attrazione tra l'elettrone e il protone. I valori di carica e di massa di queste particelle, così come le costanti G (costante gravitazionale universale) e k (costante di Coulomb) sono riportati nell'Appendice A di questo corso.
- b) Qual è il rapporto tra l'intensità della forza elettrica e la forza gravitazionale nell'atomo di idrogeno? Questo rapporto cambia se variamo la distanza tra le due particelle?

Seconda parte:

- c) Stimate il numero di protoni contenuti nella Terra a partire dalla massa della Terra e dalla massa del nucleone (spiegare perché la massa degli elettroni può essere trascurata in questo calcolo), sapendo che la maggior parte dei nuclei atomici ha in media la stessa quantità di protoni e neutroni.
- d) Quale sarebbe la carica elettrica della Terra se le venissero strappati tutti i suoi elettroni? E quella della Luna?

³Questo modello atomico è superato perché gli elettroni non hanno velocità e posizioni precise nell'atomo. Tuttavia, fornisce una buona stima dell'ordine di grandezza delle forze coinvolte.

- e) Stimate un ODG (ordine di grandezza) dell'intensità della forza elettrica tra la Terra e la Luna se le loro cariche fossero quelle calcolate al punto d). Confrontatelo con quello della forza gravitazionale.
- f) Perché, su scala astrofisica, l'interazione elettrica è trascurabile rispetto all'interazione gravitazionale?

Esercizio 9: Massa ed energia

La massa dei corpi è una delle tante forme di energia possibili (meccanica, chimica, radiazioni, calore). L'Appendice C fornisce la formula per l'energia totale di una particella che si muove a velocità v secondo la relatività ristretta:

$$E_{\text{rel}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

- a) Calcolate l'energia di massa di uno studente di 50 kg. Confrontatela con la sua energia cinetica quando si viaggia in aereo ad una velocità di 1000 km/h.
- b) Mostrare che, nel caso limite in cui $v \ll c$ (quindi $x = v^2/c^2 \rightarrow 0$), la formula relativistica di cui sopra può essere scritta come la somma dell'energia della massa a riposo più il termine dell'energia cinetica newtoniana:

$$E_{\text{rel}} \cong mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 .$$

A tal fine, sfruttare il fatto che per la funzione

$$f(x) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-x}}$$

e per $x \rightarrow 0$, possiamo usare l'approssimazione

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x .$$

- c) Quale deve essere la velocità dello studente al punto (a) perché la sua energia cinetica sia uguale alla sua energia di massa?

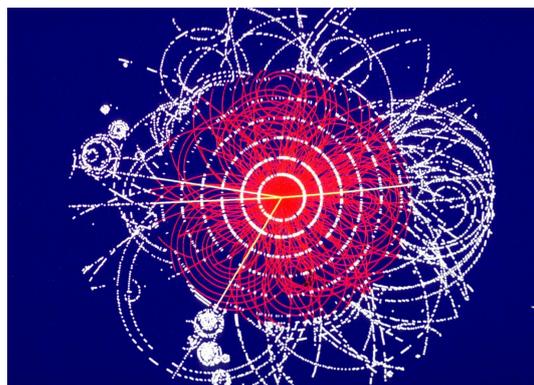
Esercizio 10: Il bosone di Higgs

L'equivalenza tra materia ed energia ci permette di creare massa a partire dall'energia cinetica delle particelle. Al CERN, il Large Hadrons Collider (LHC) accelera i protoni e poi li fa collidere, trasformando la loro energia cinetica in energia di massa. Questo ci permette di produrre, per brevi periodi di tempo, particelle che non sono mai state osservate prima a causa della loro brevissima durata di vita. Queste particelle, tuttavia, esistevano nell'universo primordiale quando esso era più denso e quindi più energetico.

Tra queste particelle, il bosone di Higgs è quella che spiega, tra l'altro, qual è l'origine della massa di tutte le particelle:

https://archive.nytimes.com/www.nytimes.com/interactive/2013/10/08/science/the-higgs-boson.html?_r=1&#/?g=true

La sua scoperta è stata annunciata per la prima volta al CERN il 4 luglio 2012, dopo decenni di ricerche: la sua esistenza era stata prevista teoricamente usando modelli matematici e argomenti di unificazione da Peter Higgs nel 1964. Questa scoperta è stata premiata con il premio Nobel a P. Higgs e F. Englert nel 2013. L'immagine a destra mostra il risultato della collisione tra due protoni che ha prodotto un bosone di Higgs che si è disintegrato in 4 muoni (tracce gialle). La sua massa è di circa $m_H \approx 2 \cdot 10^{-25}$ kg.



Fonte: <https://cds.cern.ch/record/765532>

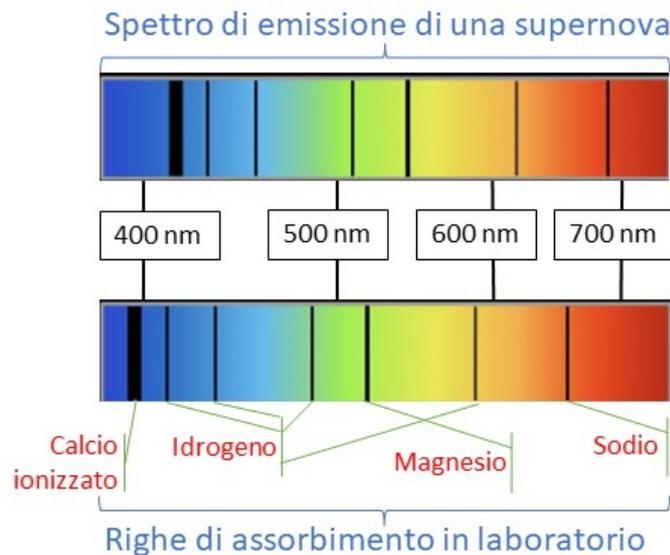
- Qual è l'energia di massa a riposo del bosone di Higgs (vedi l'esercizio precedente e l'Appendice C)?
- Se si vuole produrre un Higgs a riposo dalla collisione tra due protoni, qual è l'energia minima che ogni protone deve fornire?
- Determinate la velocità minima dei protoni affinché la loro collisione produca un bosone di Higgs.

Attenzione: poiché la velocità dei protoni si avvicina a quella della luce, $v \sim c$, non possiamo usare la meccanica newtoniana: per esprimere l'energia totale del protone, dobbiamo usare la formula dell'energia relativistica (Appendice C).

2 Espansione

Esercizio 1: La supernova

La prima banda nella figura seguente rappresenta lo spettro di emissione di una supernova: Le righe verticali nere rappresentano delle lunghezze d'onda λ che non riceviamo a causa del loro assorbimento da parte di atomi di calcio, idrogeno, magnesio e sodio che si trovano nella sorgente o nei suoi dintorni. Sappiamo a quali lunghezze d'onda corrispondono questi assorbimenti nei nostri laboratori (seconda striscia). Esse sono spostate rispetto ai valori osservati.



- Utilizzando la scala della figura precedente, determinate la differenza tra la lunghezza d'onda osservata (λ_0) e la lunghezza d'onda prevista (λ) per la riga di assorbimento del magnesio. Deducete il redshift della supernova.
- Qual è la velocità di recessione della supernova rispetto a noi? Indicate il risultato in unità del SI, nonché come rapporto tra questa velocità e la velocità della luce c .
- Ipotizzando che questo spostamento sia dovuto esclusivamente all'espansione dell'universo, fornite una stima della distanza della supernova in Mpc utilizzando la legge di Hubble-Lemaître.
- Derivate una stima di quanto tempo la luce in questa immagine ha viaggiato per raggiungerci.

Esercizio 2: Il redshift

Si consideri una sorgente lontana che emette radiazioni con lunghezza d'onda λ .

- Qual è il suo redshift se oggi osserviamo questa radiazione con una lunghezza d'onda doppia: $\lambda_0 = 2\lambda$?
- La stessa domanda di prima, ma se osserviamo $\lambda_0 = 3\lambda$ e $\lambda_0 = 10\lambda$?
- Quale deve essere il redshift di una sorgente perché una luce emessa nel verde venga osservata nel rosso?

Esercizio 3. La formula dell'effetto Doppler

- Dimostrate che la formula che mette in relazione il redshift di una sorgente $z = (\lambda_0 - \lambda)/\lambda$ con la sua velocità di recessione v rispetto all'osservatore è equivalente all'equazione dell'effetto Doppler non relativistico per un'onda che si propaga a velocità c :

$$f_0 = f \cdot \frac{c}{c + v} .$$

- Per quali valori di z è valida questa formula (cioè per quali valori il redshift cosmologico può essere assimilato a un effetto Doppler standard)?

Esercizio 4. Limite non relativistico dell'effetto Doppler relativistico

L'effetto Doppler relativistico è dato dalla formula

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}} \quad (1)$$

dove $\beta = v/c$, λ_0 è la lunghezza d'onda osservata e λ è la lunghezza d'onda di emissione di una sorgente in movimento.

- Qual è il limite di z quando $\beta \rightarrow 1$ ($v \rightarrow c$)?

- b) Dimostrate che, nel limite non relativistico $\beta \rightarrow 0$ ($v \ll c$), la formula (1) cui sopra diventa la formula classica per l'effetto Doppler:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + z = 1 + \beta . \quad (2)$$

Esercizio 5: La costante di Hubble

Con una sola cifra significativa, le stime attuali della costante di Hubble indicano

$$H_0 \approx 7 \cdot 10^4 \frac{\text{m/s}}{\text{Mpc}} .$$

- a) Convertite questo valore in $\frac{\text{nm/anno}}{\text{km}}$. Possiamo risentire degli effetti di questa espansione alla nostra scala?
- b) Qual è la velocità di espansione alla scala del diametro del sistema solare? Confrontate il suo ordine di grandezza (ODG) con quello della velocità di Plutone intorno al Sole $v_P = 4,74 \text{ km/s}$ ($= 17\,100 \text{ km/h}$).
- c) Qual è la velocità di espansione alla scala del diametro della nostra galassia? Confrontate il suo ODG con quello della velocità di rotazione del Sole intorno al nucleo galattico $v_\odot = 220 \text{ km/s}$.
- d) Qual è la velocità di espansione alla scala della dimensione media dei gruppi di galassie? Confrontatela con la velocità alla quale Andromeda (immagine sotto) si sta avvicinando alla nostra galassia $v_A = 111 \text{ km/s}$.



Fonte: https://commons.wikimedia.org/wiki/Halpha_sharp.jpg, David Dayag

Esercizio 6. Primo *deep field* del JWST

La seguente immagine risale al luglio 2022 e rappresenta la ricostruzione visibile del primo campo profondo ("deep field") del James Webb Space Telescope (JWST), progettato per rilevare le onde elettromagnetiche nell'infrarosso. Si tratta di una minuscola porzione di cielo, con un lato di circa un arcsecondo, ma ricca di galassie a distanze diverse. Le stelle luminose sono quelle appartenenti alla nostra galassia. L'immagine è centrata sull'ammasso SMACS 0723, le cui due galassie ellittiche più luminose sono chiaramente visibili al centro dell'immagine. Il redshift di questo ammasso è $z = 0,388$.



Fonte: NASA, ESA, CSA, e STScI

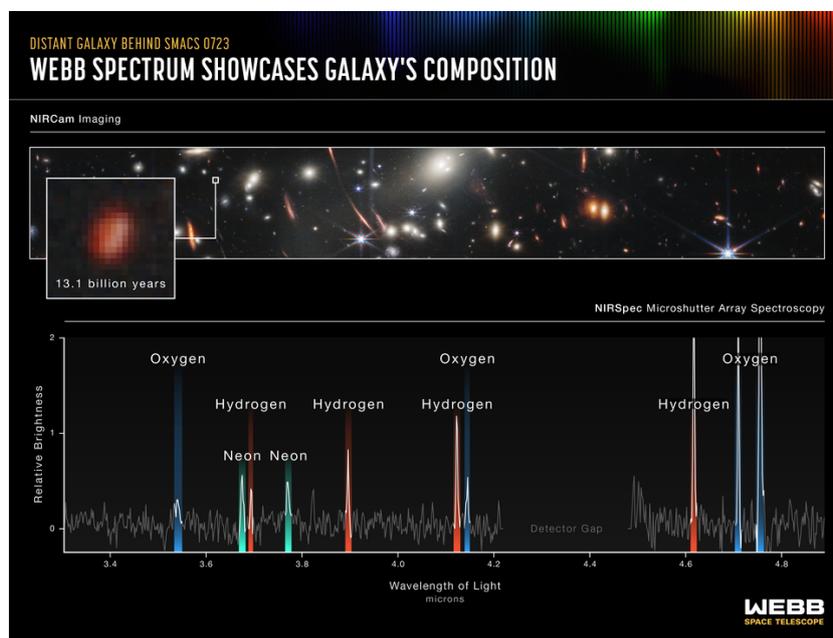
<https://www.nasa.gov/image-feature/goddard/2022/nasa-s-webb-delivers-deepest-infrared-image-of-universe-yet>

- Dal redshift, calcolate la lunghezza d'onda λ_0 rilevata dal telescopio della riga di emissione dell'ossigeno OIII di SMACS 0723, sapendo che per una sorgente OIII osservata in laboratorio questa lunghezza è $\lambda = 0,5007 \mu\text{m}$.
- Determinate la distanza da SMACS 0723. L'espansione è trascurabile a questa distanza? Giustificate la vostra risposta.

L'ammasso SMACS 0723 crea un effetto di lente gravitazionale (discusso nel Capitolo 4) su molte delle sorgenti più distanti, che di conseguenza appaiono distorte e amplificate⁴. In particolare, la sorgente mostrata nell'ingrandimento sottostante è tra le più distanti. Per questa sorgente sono riportate anche le lunghezze d'onda di emissione rilevate di alcuni elementi chimici, in μm . In particolare, l'ultima riga dell'ossigeno (riga blu all'estrema destra) rappresenta l'ossigeno OIII⁵.

⁴Per un'analisi approfondita si veda il riferimento <https://arxiv.org/pdf/2207.07101.pdf>.

⁵Le linee rappresentano, da sinistra a destra, il doppietto OII ($\lambda = 372,6$ e $372,8$ nm), NeIII



Fonte: NASA, ESA, CSA, e STScI <https://esawebb.org/news/weic2209/>.

- c) Leggendo il valore della lunghezza d'onda osservata per la riga dell'ossigeno OIII, emessa circa 13,1 miliardi di anni fa da questa lontana sorgente, calcolarne il redshift.
- d) Verificate che la risposta trovata al punto c) sia coerente con il tempo di percorrenza della luce indicato nella figura, confrontando il risultato con i valori riportati nella tabella del sito web seguente: <http://lcoqt.net/spacebook/redshift>.
- e) Questa sorgente si trova all'interno del raggio di Hubble? Perché o perché no? Spiegate la vostra risposta utilizzando le formule.
- f) Possiamo calcolare la distanza che ci separa da questa sorgente utilizzando la legge di Hubble-Lemaître? Spiegate.
- g) La velocità con cui questa sorgente si allontana supera la velocità della luce? Se no, calcolate questa velocità. Se sì, spiegate perché la sua luce può ancora raggiungerci.

($\lambda = 386,9$ nm), He ($\lambda = 388,9$ nm), NeIII ($\lambda = 396,8$ nm), H_ϵ ($\lambda = 397,0$ nm), H_δ ($\lambda = 410,2$ nm), H_γ ($\lambda = 434,05$ nm), il primo OIII ($\lambda = 436,3$ nm), H_β ($\lambda = 486,13$ nm) e gli altri due OIII ($\lambda = 495,9$ e $500,7$ nm).

Esercizio 7: Universi gemelli

Leggete il fumetto "Cosmic Story" :

http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Italien/cosmic_story_it/cosmic_story_it.pdf

Alla luce delle vostre conoscenze del Big Bang, qual è il problema del modello di "universo bipolare" (pagine 57-60 del fumetto)?

Esercizio 8: Redshift della radiazione di fondo (CMB)

- Sapendo che l'universo all'epoca di disaccoppiamento aveva una temperatura $T = 3000$ K, determinate la lunghezza d'onda del picco dello spettro di emissione λ_{\max} del CMB a quell'epoca. Utilizzate la legge di Wien (Appendice D.1 della teoria, sulla radiazione del corpo nero).
- Sappiamo che oggi il CMB ha una temperatura di circa 2,7 K. Qual è il suo redshift?
- Utilizzando la legge di Hubble-Lemaître, possiamo determinare la distanza che ci separa dal disaccoppiamento? Se sì, provate a farlo. In caso contrario, spiegate il motivo.

Esercizio 9: Distanze di luminosità

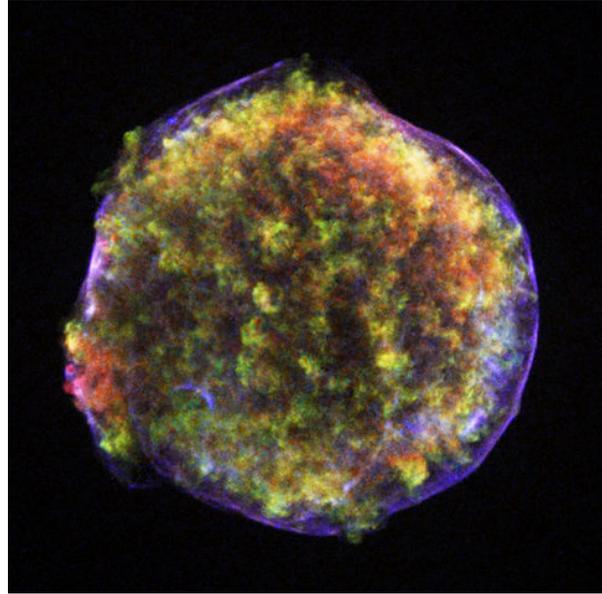
Video sulle Supernovae Ia al sito: https://it.wikipedia.org/wiki/Supernova_di_tipo_Ia

- Indicate la formula che esprime la distanza D_L tra un osservatore e una sorgente in funzione della sua luminosità assoluta L e del flusso misurato f . Si supponga che l'emissione dalla sorgente sia sfericamente simmetrica.
- Sapendo che la luminosità di una supernova Ia è dell'ordine di dieci miliardi di volte superiore a quella del Sole ($L_{\text{Sole}} = 4 \cdot 10^{26}$ W), qual è l'ODG della sua distanza se si misura un flusso di 10^{-13} W/m²? Fornite la risposta in m e Mpc.
- Misurando la loro luminosità, e confrontandola con il redshift, si osserva che, per le sorgenti più lontane, le distanze corrispondenti sono molto maggiori di quelle previste se l'universo fosse composto esclusivamente da materia – sia ordinaria che oscura – in quanto essa dovrebbe rallentare la sua espansione per attrazione gravitazionale (grafico seguente). Come si spiega questo fatto?

Nell'esercizio 1 abbiamo visto che è possibile determinare la distanza di alcune sorgenti a partire dal redshift.

Tuttavia, per alcune sorgenti chiamate **candele standard**, delle quali conosciamo la luminosità assoluta L (la potenza radiativa, in W) possiamo determinare la distanza misurando il flusso ricevuto f (la potenza per unità di superficie, in W/m^2). La distanza determinata in questo modo è detta **distanza di luminosità**, indicata con D_L (allegato D.2).

Un esempio importante di candela standard usata in cosmologia sono le esplosioni di supernovae Ia.



Credito: NASA/CXC/Rutgers/J.Warren & J.Hughes et al. Questa foto è un'immagine a raggi X dei resti della supernova Ia osservata nel 1572 dall'astronomo danese Tycho Brahe.

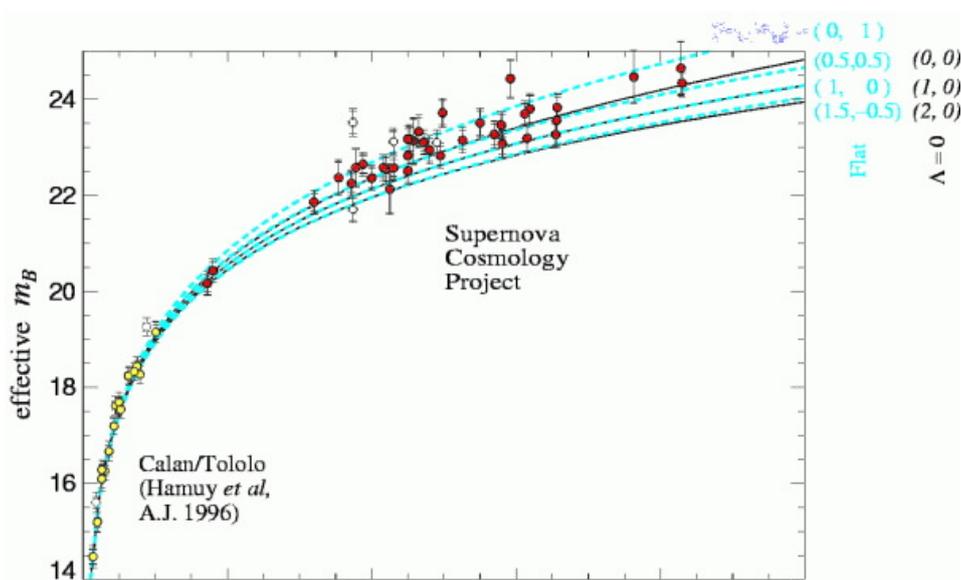
Il grafico qui sopra mostra le misurazioni pubblicate in un articolo scientifico nel 1998 (Perlmutter et al., Premio Nobel nel 2011).

Si tratta della magnitudine delle supernovae Ia, m_s (che è una funzione della luminosità: $m_s = -2,5 \cdot \log f_s + \text{costante}$) in funzione del redshift.

Esercizio 10: Vero o falso?

Giustificate ogni risposta.

1. Le galassie a spirale sono più antiche delle galassie ellittiche.
2. I barioni sono particelle che interagiscono solo gravitazionalmente.
3. A causa dell'espansione dell'universo, la velocità di recessione tra due galassie molto lontane può superare la velocità della luce, anche se la relatività ristretta afferma che nulla può andare più veloce di c (Appendice C).
4. Nella relatività ristretta la materia è una forma di energia (Appendice C). Quindi la materia oscura e l'energia oscura sono due modi diversi per definire la stessa cosa.



Fonte: Perlmutter *et al.*, *Astrophysical Journal* 517, 565-586, 1999.

5. Poco prima del disaccoppiamento, la materia oscura era libera di creare sovradensità per attrazione gravitazionale, perché essa non interagiva con la radiazione elettromagnetica.
6. Il Big Bang è un'esplosione che ha avuto luogo in un certo istante e che ha dato vita all'universo.

Attività. Il redshift cosmologico

Quando osserviamo galassie lontane, la luce che riceviamo è sistematicamente spostata verso il rosso.

- a) Spiegate perché le onde che riceviamo hanno sempre una lunghezza d'onda λ_0 maggiore della lunghezza d'onda λ emessa dalla sorgente.

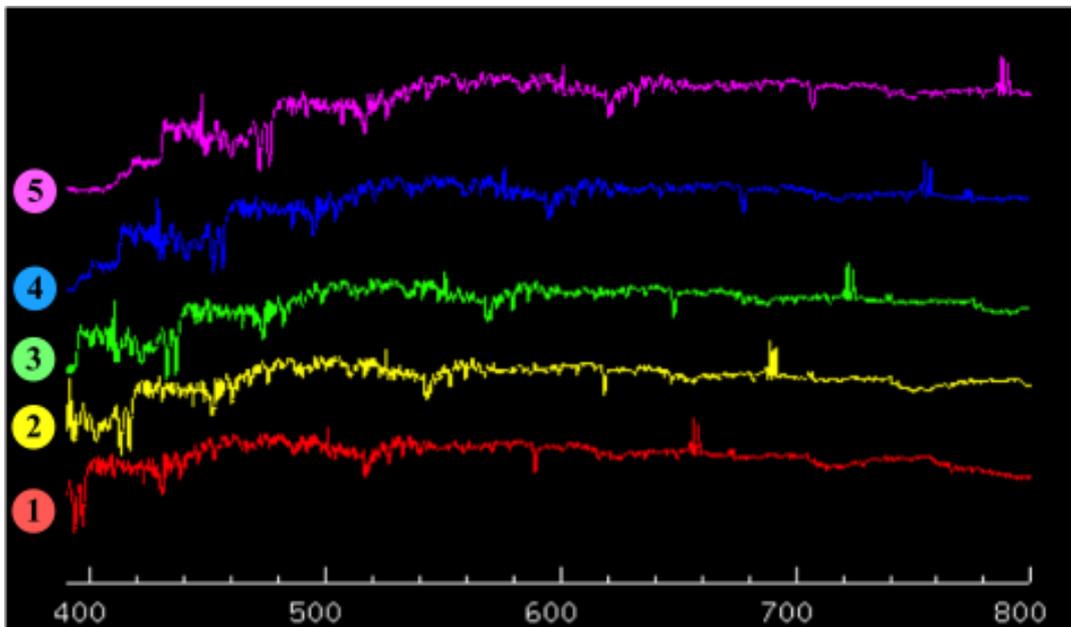
L'immagine seguente mostra un esempio di spettro di emissione dello stesso tipo di galassia⁶ a distanze diverse. Si tratta dell'intensità della radiazione ricevuta (asse y , in W) per ogni lunghezza d'onda (asse x , in nm). Dal basso verso l'alto, vediamo:

⁶Si tratta di galassie diverse a distanze diverse, ma con le stesse caratteristiche chimiche e che quindi emettono lo stesso spettro.

1. Lo spettro di emissione osservato nella nostra galassia a una distanza di $r = 0$ al. Questo rappresenta lo spettro così com'è all'emissione, senza alcuno spostamento (λ).

Gli spettri seguenti rappresentano gli stessi del primo, ma ricevuti da galassie sempre più distanti: questi spettri sono sempre più spostati verso il rosso. ($\lambda_0 > \lambda$):

2. Lo stesso spettro, ricevuto da una galassia alla distanza di $r = 6,0 \cdot 10^8$ al;
3. Lo stesso spettro, ricevuto da una galassia alla distanza di $r = 12 \cdot 10^8$ al;
4. Lo stesso spettro, ricevuto da una galassia alla distanza di $r = 18 \cdot 10^8$ al;
5. Lo stesso spettro, ricevuto da una galassia alla distanza di $r = 21 \cdot 10^8$ al.



- b) Utilizzando il picco di emissione più pronunciato (quello per il quale λ è di circa 650 nm nella nostra galassia), completate la seguente tabella.

	λ_0 [nm]	$\lambda_0 - \lambda$ [nm]	$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda}$	r [Mpc]
Picco dello spettro 2)				
Picco dello spettro 3)				
Picco dello spettro 4)				
Picco dello spettro 5)				

- c) Quante cifre significative hanno i dati meno precisi di questa tabella?
- d) Utilizzando i dati della tabella, tracciate su un grafico i corrispondenti punti del redshift (asse y) in funzione della distanza dalla galassia (asse x). *È possibile utilizzare un foglio di calcolo come Calc o Excel. Non dimenticate di indicare il titolo, le quantità e le unità sugli assi.*
- e) Possiamo vedere se esiste una relazione tra z e r ? Se sì, di che tipo?
- f) Inserire una linea di tendenza in questo grafico: una retta con equazione $z = a \cdot r + b$, dove $b = 0$ (dove z è l'ordinata e r l'ascissa). Spiegate perché b deve essere zero.
- g) Quale relazione tra z e r è rappresentata da questa retta? Qual è il valore numerico (con un numero appropriato di cifre significative e l'unità corretta) della costante a nell'equazione $z = a \cdot r$? A quale grandezza fisica corrisponde?
- h) Utilizzate la formula dell'effetto Doppler che lega z e v (per $v \ll c$) per trovare la relazione tra le velocità delle galassie osservate v e la loro distanza r , a partire dal risultato del punto (g): $v = \text{costante} \cdot r$.
- i) Qual è il valore numerico di questa costante (con un numero appropriato di cifre significative e l'unità corretta)? Come si può interpretare questo risultato dal punto di vista cosmologico?

3 Basi di relatività generale

Esercizio 1: Carica elettrica e carica gravitazionale

Supponiamo che ci siano due corpi di massa e carica elettrica rispettivamente m_1 , q_1 e m_2 , q_2 .

- Ognuno di questi corpi è posto separatamente ad una distanza d da una terza massa M priva di carica elettrica. Scrivete, per ciascuno dei due corpi, la formula che esprime l'accelerazione dovuta all'interazione gravitazionale con M .
- Ognuno di questi corpi è posto separatamente ad una distanza d da una terza carica Q di massa trascurabile. Scrivete, per ciascuno dei due corpi, la formula che esprime l'accelerazione dovuta all'interazione elettrica con la carica Q .
- L'accelerazione dipende dalle caratteristiche dei corpi 1 e 2 nel caso a)? E nel caso b)? Spiegate il perché.
- La forza può essere repulsiva nel caso a)? E nel caso b)? Spiegate il perché.

Esercizio 2: L'aereo pazzo

- Cosa possiamo dire della velocità dell'aereo nella foto accanto? E della sua accelerazione?
- Senza ulteriori informazioni, possiamo sapere se l'aereo si sta avvicinando o si sta allontanando dalla superficie terrestre?



Fonte: <https://www.wired.com/2013/09/how-do-you-pour-water-up-into-a-glass/>

Esercizio 3

Scegliete la casella corrispondente all'affermazione corretta, e poi giustificare la scelta effettuata. È possibile procedere per esclusione (spiegando perché alcune scelte sono sbagliate).

1. L'equivalenza tra massa ed energia implica
 - che la massa gravitazionale è diversa dalla massa inerziale.
 - che un corpo ha energia solo per il fatto di avere una massa.
 - che la massa è sempre conservata.
 - che la forma dello spazio-tempo non è influenzata dall'energia che contiene.
 - che la forma dello spazio-tempo è influenzata dalla massa che contiene solo se la massa è abbastanza grande.

2. Una persona è racchiusa in una navetta spaziale senza finestre, lontano da qualsiasi stella. Per alcuni minuti viene schiacciata contro un lato della navetta, poi galleggia al suo interno. Una possibile spiegazione è che
 - la navetta sia stata prima accelerata e poi decelerata fino a fermarsi.
 - la navetta sia stata prima accelerata, poi l'accelerazione sia cessata e la navetta abbia continuato a muoversi a velocità costante.
 - la navetta si sia sempre mossa a velocità costante.
 - la navetta si sia sempre mossa con un'accelerazione costante.
 - la navetta abbia seguito prima un movimento rettilineo e uniforme e poi, mentre la persona galleggiava, abbia accelerato.

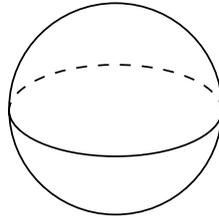
Esercizio 4: Solidi

a) Ciascuno dei seguenti oggetti (o parti di oggetti) è associato al solido accanto ad esso. Sulla superficie di ogni solido, colorate

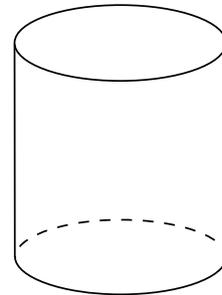
- in giallo le parti di superfici, le linee o i punti costituiti da punti con curvatura di Gauss k_G positiva;
- in blu le parti di superfici, le linee o i punti costituiti da punti con k_G negativa;
- in rosso le parti di superfici, le linee o i punti con k_G nulla.



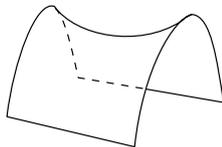
1. Sfera



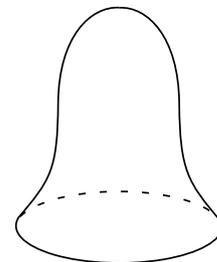
2. Cilindro



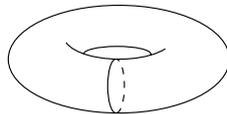
3. Sella



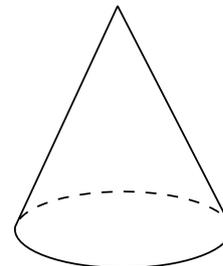
4. Campana



5. Toro



6. Cono



b) Per ogni solido colorato, possiamo determinare qual è il segno della curvatura totale K ? Calcolatelo, se possibile.

Esercizio 5: Cerchio osculatore di una parabola

Si consideri la parabola di equazione $y_p(x) = x^2$.

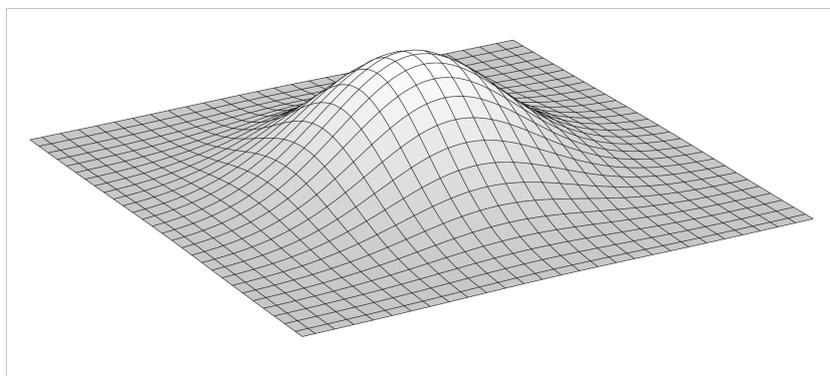
- Determinate il raggio di curvatura R del cerchio osculatore di questa parabola nel punto $(0;0)$. Qual è la sua curvatura in questo punto?
- Trovate la curvatura della stessa parabola, ma nel punto $(1;1)$.
- Scrivete l'equazione che esprime la curvatura in un punto generico della parabola $(x; y = x^2)$ in funzione dell'ascissa del punto: $k(x)$.
- Perché non ha senso parlare di cerchio osculatore di una linea retta?

Metodo consigliato: scrivete l'equazione generica del cerchio e poi esplicitate $y_c(x)$ (attenzione al segno della radice). Quindi risolvete il sistema imponendo 1) il passaggio attraverso il punto scelto, 2) l'uguaglianza delle derivate prime $y'_c = y'_p$ e 3) l'uguaglianza delle derivate seconde $y''_c = y''_p$.

Esercizio 6: Il dosso

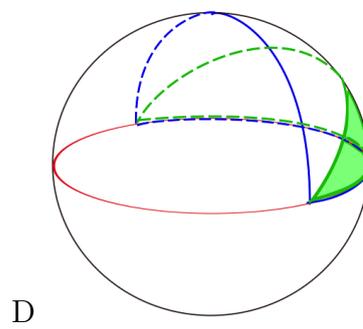
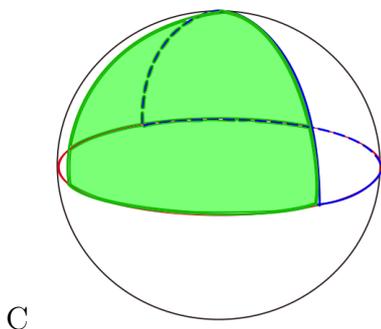
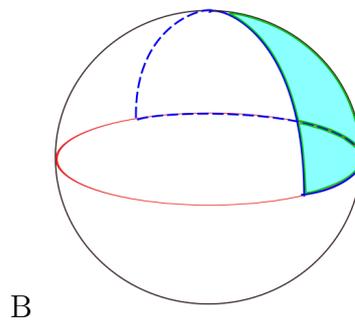
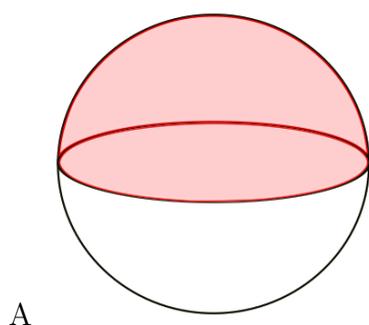
Immaginate di avere in mano un foglio di carta sottile, flessibile e piatto. Premete leggermente con un dito da sotto spingendo verso l'alto fino a creare un dosso come quello della figura di fronte.

- Qual è la curvatura di Gauss dei punti sul foglio prima di premere? E la curvatura totale del foglio?
- Rispondete alle stesse domande, ma per il foglio deformato.



Esercizio 7: Trasporto parallelo

- a) Utilizzando la definizione di curvatura totale di una superficie e il ragionamento, determinate quale sia la curvatura totale della superficie
1. di una sfera;
 2. di una mezza sfera (parte A della figura sotto);
 3. di un quarto di sfera (parte B della figura sotto);
 4. di un ottavo di sfera (parti C e D della figura sotto).
- b) Utilizzate il metodo di trasporto parallelo per verificare i 4 risultati della domanda precedente. Per l'ottavo di sfera testate entrambe le possibilità: dividendo il quarto nelle due direzioni possibili, in modo da ottenere un triangolo o un "biangolo" (parti C e D della figura sotto).
- c) Generalizzate i risultati riportati al punto a): qual è la curvatura totale della superficie della n-esima parte di una sfera?



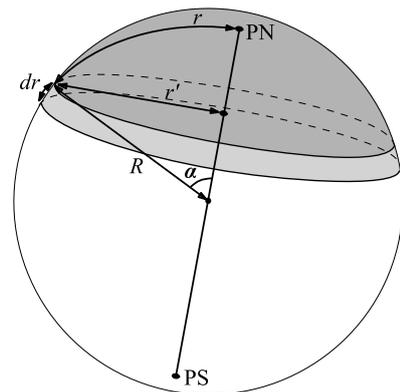
Esercizio 8: Il cilindro

- a) Su un foglio di carta A4, posizionate due punti P e Q in modo che la loro distanza sia dello stesso ordine di grandezza del foglio. Tracciate la geodetica che passa attraverso questi due punti. Essa corrisponde al percorso più breve tra questi due punti?
- b) Utilizzando lo stesso foglio di carta, costruite un cilindro incollando due bordi opposti tra loro in modo che la geodetica tracciata nel punto (a) si trovi all'esterno del cilindro così creato.
1. La geodetica tracciata nel punto (a) è ancora una geodetica per il cilindro? Si tratta ancora il percorso più breve tra P e Q? In caso contrario, tracciare il percorso più breve sul cilindro.
 2. Quante geodetiche che collegano P e Q esistono sulla superficie del cilindro?
 3. Cosa succede se invece di disegnare i punti P e Q come indicato al punto (a), li avviciniamo molto, al centro del foglio? Cosa ne possiamo dedurre?

Esercizio 9: Cerchi, dischi e sfere in uno spazio curvo

In uno spazio piatto a due dimensioni le formule per il perimetro e l'area di un disco di raggio r sono $P(r) = 2\pi r$ e $A(r) = \pi r^2$.

- a) Utilizzando la figura qui a fianco, scrivete le equazioni corrispondenti a quelle indicate sopra, ma in uno spazio curvo, con curvatura di Gauss costante positiva $k = 1/R^2$ (la sfera del disegno): $P(r, R)$ e $A(r, R)$.
- b) Per le due formule trovate nel punto 1, verificate che per i valori limite:
- $r = 0$ (al polo nord, punto PN),
 - $r = \pi R/2$ (all'equatore),
 - $r = \pi R$ (al polo sud, punto PS)



si trovano i risultati attesi, ad esempio, per il perimetro

$$P(r = 0) = 0, \quad P(r = \pi R/2) = 2\pi R \quad \text{e} \quad P(r = \pi R) = 0.$$

- c) Seguendo la stessa procedura per l'area e il perimetro di un cerchio di raggio r , scrivete la formula per il volume di una sfera di raggio r in uno spazio 3D curvo con un raggio di curvatura costante positivo.

Metodo consigliato: considerate uno spazio uniformemente curvo (raggio di curvatura R). Così come l'area (2D) di un cerchio di raggio r corrisponde a quella della calotta di raggio r sulla sfera 3D di raggio R , il volume di una sfera (3D) di raggio r corrisponde al volume della calotta dell'ipersfera 4D di raggio R . Per questo punto non è possibile una visualizzazione, bisogna fidarsi dei calcoli... e testare il risultato con il caso limite $r \rightarrow 0$.

I seguenti link danno accesso a due fumetti che ci fanno intuire ciò che accade con le quantità geometriche in uno spazio curvo.

Il geometricon :

http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Italien/il_geometricon.htm

Il buco nero:

http://www.savoir-sans-frontieres.com/JPP/telechargeables/Italien/trou_noir_italien/trou_noir_italien.html

Esercizio 10: Due visioni della caduta libera.

- a) Indicare il *principio di equivalenza* nelle sue due versioni.
- b) Spiegate che cos'è il moto inerziale (i) nella teoria di Einstein e (ii) nella teoria di Newton.
- c) Per ogni situazione, scegliere la casella corrispondente alla teoria per la quale si tratta di un moto inerziale.
- Una navetta che viaggia a velocità costante nello spazio, lontano da qualsiasi corpo celeste.
 meccanica newtoniana relatività generale
 - Un paracadutista all'inizio della sua caduta, in MRUA con un'accelerazione pari a g .
 meccanica newtoniana relatività generale

3. Lo stesso paracadutista alla fine della caduta, quando raggiunge la sua velocità limite costante.
 meccanica newtoniana relatività generale
4. Una locomotiva immobile sulla superficie terrestre.
 meccanica newtoniana relatività generale
5. Un esopianeta in orbita attorno alla sua stella.
 meccanica newtoniana relatività generale
6. Un proiettile di moto parabolico, lanciato dalla superficie di un pianeta.
 meccanica newtoniana relatività generale

Esercizio 11: Movimento inerziale?

Per ciascuno dei seguenti movimenti

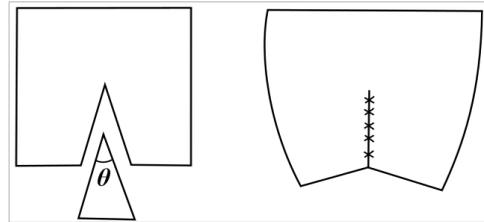
- a) disegnare i due diagrammi delle forze sul corpo in questione e
 - b) specificare se il movimento è inerziale
 - i) secondo la meccanica newtoniana (MN) e
 - ii) secondo la relatività generale (RG).
1. Una sonda che viaggia nello spazio, lontana da qualsiasi massa.
 2. Una cometa che si allontana dal Sole con un'orbita ellittica.
 3. Una mela per terra.
 4. La carrozza di un treno in moto rettilineo uniforme.
 5. La carrozza di un treno in moto rettilineo uniformemente accelerato.
 6. Una ciclista che percorre una pista con un movimento circolare uniforme.
 7. La Terra nel suo moto, considerato circolare e uniforme intorno al Sole.
 8. Un martello lasciato cadere con velocità iniziale zero sulla superficie della Luna.
 9. Una goccia di pioggia che cade sulla superficie terrestre a velocità costante.

Attività: La curvatura del cono

Un cono è un solido con curvatura gaussiana nulla ovunque, tranne che al vertice.

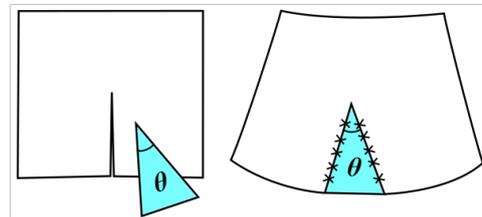
- a) Utilizzando un foglio di carta piatto su cui avete disegnato una griglia di geodetiche (linee rette), costruite un cono come segue:

1. Disegnare un angolo arbitrario θ al centro del foglio e misurarlo (in gradi, poi convertire in radianti).
2. Ritagliare l'angolo con le forbici.
3. Incollare i due bordi tagliati del foglio (senza sovrapporli).



- b) Cosa si può dire delle geodetiche parallele sul cono? Convergono, divergono o rimangono parallele? *Ricordate che le geodetiche devono avere lo stesso angolo di intersezione con la griglia originale.*
- c) Seguendo le geodetiche sulla superficie del cono risultante, disegnare un triangolo ABC in modo che il vertice del cono sia al suo interno.
- d) Utilizzando il metodo del *trasporto parallelo*, misurate la curvatura totale K della superficie del triangolo disegnato. Secondo voi, esiste una relazione tra K e θ ?
- e) Misurare gli angoli interni del triangolo ABC (chiamarli α , β e γ) e calcolarne la somma. Qual è la relazione tra $\alpha + \beta + \gamma$ e l'angolo θ nel punto (a)? Dimostrare questa relazione geometricamente.
- f) Utilizzando i risultati trovati in (d) ed (e), fornire la formula che mette in relazione la somma degli angoli interni di un triangolo con la sua curvatura totale, quindi confrontarla con la formula fornita nel corso (Capitolo 4).

- g) Come cambiano le risposte ai punti (b), (c), (d), (e) e (f) se aggiungiamo un angolo θ al punto (a), invece di toglierlo?



- h) Spiegare perché la curvatura gaussiana del vertice di un cono è infinita.

4 Lenti gravitazionali

Esercizio 1: Angolo di deflessione α (analisi dimensionale)

Possiamo trovare una formula per l'angolo di deviazione senza il fattore numerico (questo fattore è 2 per Newton e 4 per Einstein), ma in modo più semplice: con l'aiuto dell'analisi dimensionale. L'idea è di considerare che questa deviazione dovrebbe dipendere solo da 3 quantità:

1. L'accelerazione gravitazionale alla distanza più vicina dalla lente gravitazionale $g = \frac{GM}{d^2}$, essendo un'accelerazione, la sua unità fondamentale è $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
2. Il parametro di impatto d (distanza di passaggio), la cui unità SI è il metro (m) ;
3. La velocità di passaggio c , la cui unità SI è $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$;

Poiché la deviazione è un angolo, senza dimensioni, le sue unità SI sono radianti. Quindi in una combinazione $\alpha \sim g^p \cdot d^q \cdot c^r$, dove p , q e r sono numeri interi, i metri e i secondi devono per forza semplificarsi. Utilizzare quest'idea per trovare i vincoli per gli esponenti interi p , q e r . Scegliere la soluzione più semplice per trovare la formula (senza fattore numerico) per la deviazione.

Esercizio 2: Deviazione dal Sole

Secondo la formula relativistica, ottenuta nel 1915 da A. Einstein, la deviazione di un raggio di luce è il doppio di quella che si ottiene secondo un calcolo newtoniano approssimativo.

Sperimentalmente, possiamo misurare questa deviazione della luce da una stella lontana mentre passa vicino al Sole. L'idea è quella di misurare la posizione di una stella nel cielo quando il Sole non è presente, e poi confrontare questa posizione con quella misurata quando l'immagine del Sole è vicina a quella della stella: l'immagine sarà spostata di un angolo α . Tuttavia, per fare questo, è necessario effettuare questa seconda misurazione durante un'eclissi solare totale, altrimenti la luce del giorno non permetterebbe di vedere quella della stella.

Calcolare la deviazione di un raggio di luce che passa ad una distanza $d = R_{\text{Sole}}$ dal centro del Sole utilizzando

1. la formula newtoniana,
2. la formula relativistica

Nota storica

L'osservazione di Eddington dell'angolo di deflessione della luce stellare durante l'eclissi solare del 1919 fu il primo esperimento che confermò la teoria di Einstein. In realtà, la sola misurazione di Eddington non è stata abbastanza accurata da confermare solidamente il risultato della relatività generale e un consenso definitivo si è formato solo nel corso dell'ultimo secolo.

Link ESA :

http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Relativity_and_the_1919_eclipse

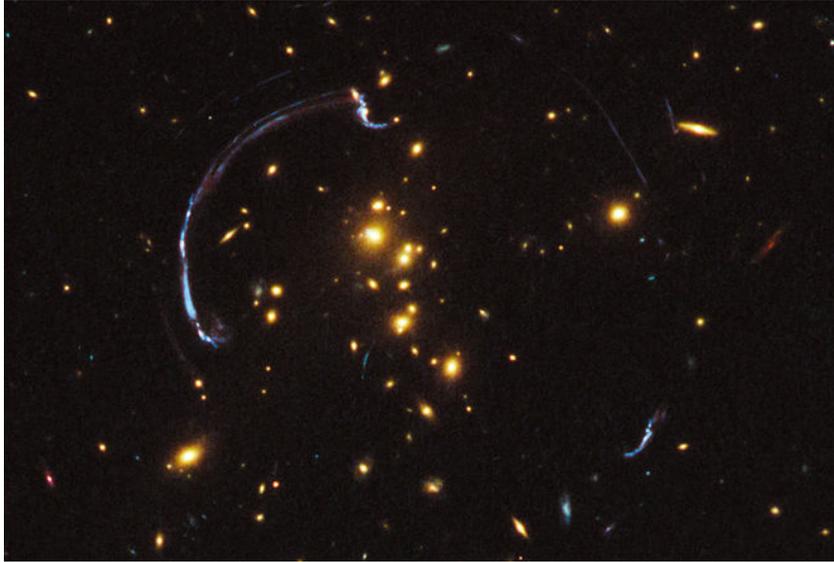
Esercizio 3: Lensing lunare ?

Una deviazione dell'ordine di $1''$ dell'immagine di una sorgente può essere facilmente misurata.

- Convertite $1''$ in radianti.
- Calcolate il parametro d'impatto d che un raggio di luce deve avere perché la Luna produca una deflessione $\alpha \approx 1''$.
- Perché la Luna non può produrre lenti gravitazionali osservabili? Quale dovrebbe essere l'ordine di grandezza della sua densità per produrre lenti osservabili?

**Esercizio 4: RCS2 032727-132623**

La seguente immagine è stata scattata dal telescopio spaziale Hubble nel 2012. In giallo brillante, al centro, vediamo l'ammasso di galassie RCS2 032727-132623, a circa 2 Gpc di distanza da noi.



Fonte: NASA, ESA, J. Rigby, K. Sharon, M. Gladders e E. Wuyts,
<http://www.space.com/14481-hubble-photo-brightest-galaxy-gravitational-lens.html>.

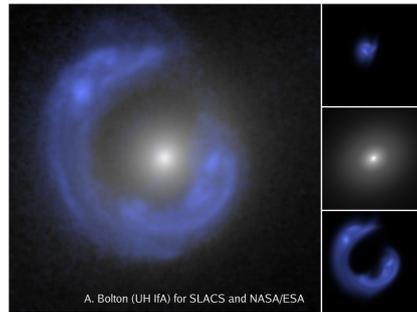
- a) Quali sono gli indizi che permettono di dire che questo ammasso è una lente gravitazionale? Spiegate la vostra risposta con un diagramma che mostra il percorso dei raggi di luce fino all'osservatore.
- b) Che tipo di lenti gravitazionali sono queste? Giustificare la risposta.
- c) Perché non si osserva un anello di Einstein in questo caso?
- d) Possiamo distinguere immagini dalla stessa sorgente?

Esercizio 5: L'anello di Einstein

La figura sottostante rappresenta uno dei primi anelli di Einstein osservati. Risale al 1998 e mostra la galassia SDSSJ1430 (in blu) vista attraverso una lente gravitazionale. A sinistra, al centro in bianco, si vede la galassia, molto più vicina, che funge da lente.

Le immagini a destra, dall'alto verso il basso, rappresentano rispettivamente:

1. una ricostruzione al computer di come l'immagine della sorgente dovrebbe apparire senza una lente,
2. la lente da sola e
3. la sola immagine distorta.

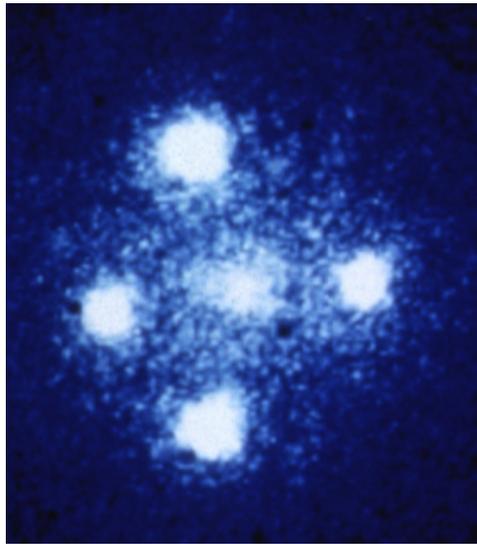


Fonte: <http://apod.nasa.gov/apod/ap080728.html>.

- a) Spiegare in quali condizioni possiamo osservare questo tipo di immagini.
- b) Gli astrofisici usano queste osservazioni per stimare la massa della lente: misurano il redshift per la lente $z_L = 0,285$ e per la sorgente $z_S = 0,575$, così come il raggio di Einstein $\theta = 1,51''$. Utilizzando questi dati, calcolare la massa della lente. Indicare il risultato in kg e masse solari M_\odot . Non dimenticate di convertire θ in radianti.
- c) Quante cifre significative ha questo risultato? Quali sono le fonti di incertezza?
- d) Perché questo tipo di stima di massa su larga scala è importante nella cosmologia moderna?

Esercizio 6: La croce di Einstein

Questa foto della croce di Einstein risale al 1990 ed è la più dettagliata mai realizzata di questo oggetto. Le 4 immagini che formano la croce hanno un redshift di 1,7, che corrisponde alla distanza di 3 Gpc, mentre la galassia al centro ha un redshift di 0,0394. Inoltre, è stata misurata la distanza angolare media tra le quattro immagini della croce e il centro. Possiamo considerare questa distanza angolare come una buona stima del raggio di Einstein associato, che è pari a 0,8 secondo d'arco.



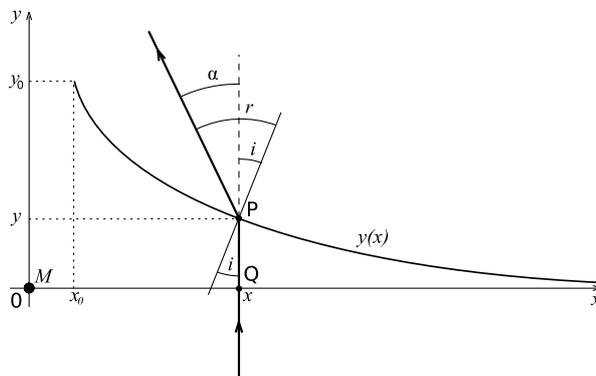
Fonte: NASA, ESA, e STScI

- Spiegare (1) qual è il fenomeno alla base di questa osservazione, (2) quali sono le condizioni perché questa immagine a forma di croce si verifichi.
- Utilizzando la Legge di Hubble, verificare che la distanza della galassia dal centro dell'immagine sia di 0,2 Gpc.
- Da questo, dedurre la distanza tra la galassia al centro (L) e la sorgente delle 4 immagini (S).
- Determinare il raggio di Einstein di questa immagine in radianti.
- Scrivete la formula che mette in relazione questo raggio di Einstein con la massa della galassia al centro dell'immagine.
- Derivare una stima della massa della galassia al centro dell'immagine in kg, poi in M_{\odot} .

Esercizio 7: Perché un bicchiere da vino?

- a) Si possono simulare lenti forti utilizzando una lente ottica (ad esempio in plexiglas), a condizione che il suo profilo sia ben scelto. Spiegare perché un profilo biconvesso non è adatto.

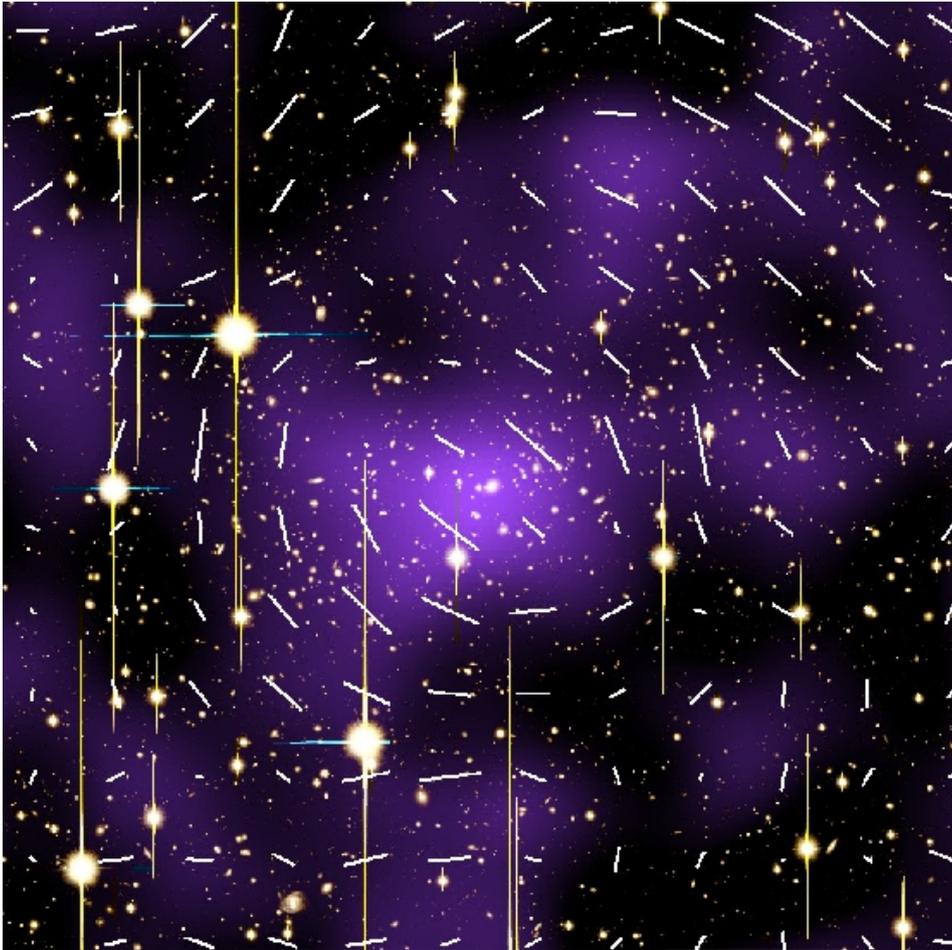
Si consideri una lente ottica di indice di rifrazione n , con una forma simile a quella della base di uno bicchiere da vino. Vogliamo sapere quale dovrebbe essere il suo profilo in modo da simulare una lente gravitazionale puntiforme di massa M , piazzata all'origine del sistema di coordinate. Il grafico sotto a sinistra rappresenta la lente desiderata: la sua base è piatta (l'asse delle x) e il profilo è dato dalla funzione sconosciuta $y(x)$ (foto a destra).



- b) Immaginiamo un raggio di luce incidente perpendicolarmente alla base della lente in un generico punto Q abbastanza lontano dal centro, con coordinate $(x; 0)$. Il raggio non verrà deviato a questo punto, perché?
- c) D'altra parte, esso sarà deviato al punto $P(x; y(x))$, all'uscita del vetro. Scrivere la legge di rifrazione che collega gli angoli r, i e l'indice di rifrazione n , con l'approssimazione $\sin(r) \cong r$ e $\sin(i) \cong i$ (poiché $r \ll i$ e $i \ll 1$).
- d) Sapendo che $r = i + \alpha$, dove $\alpha = 4GM/c^2x$ è la deviazione che vogliamo avere per il raggio di luce (deviazione *inversamente* proporzionale alla distanza di passaggio tra il raggio di luce e la massa M), e utilizzando l'equazione che si trova al punto c), scrivere la relazione tra i, n e α , quindi spiegare i in funzione di G, M, c, x e n . Poiché G, M, c e n sono costanti, abbiamo trovato come l'angolo di incidenza dovrebbe variare in funzione di x : $i(x)$.
- e) Poiché i è l'angolo tra il raggio incidente (verticale) e la normale alla curva $y(x)$ nel punto P , la tangente a questa curva in questo punto è $y'(x) = dy/dx = -i(x)$. Sostituire l'espressione ottenuta al punto d) per $i(x)$ e poi integrare questa equazione per trovare il profilo $y(x)$.

Esercizio 8: A2390

Questa è un'immagine dell'ammasso di galassie A2390. La dimensione angolare di questa immagine è $12' \times 12'$, e in ogni cella ($1' \times 1'$) sono state aggiunte delle linee.



Fonte: Oguri, Masamune et al. MNRAS. 405 (2010) 2215-2230 arXiv:1004.4214 [astro-ph.CO]
(<https://inspirehep.net/record/853072/plots>)

- Possiamo dire che in questa immagine è presente un effetto di lente gravitazionale? Se sì, che tipo di lenti è? In ogni caso, giustifichi la sua risposta.
- Cosa rappresentano le linee aggiunte in ogni cella dell'immagine?
- Cosa rappresentano le aree colorate di viola (più chiare)?

Esercizio 9. Anello doppio

L'immagine sotto mostra un fenomeno unico osservato di recente⁷ dal satellite Hubble. Si tratta di due anelli concentrici attorno alla stessa lente, costituiti da una galassia nana con redshift $z_L = 0,222$ (la sorgente luminosa al centro dell'immagine a sinistra). Il raggio di Einstein del primo anello è $\theta_1 = 1,43''$ e il suo redshift è $z_1 = 0,609$. Per il secondo anello, meno visibile, abbiamo misurato $\theta_2 = 2,07''$ e $z_2 \approx 3$.



Fonte: <https://esahubble.org/news/heic0803/> e <https://en.wikipedia.org/wiki/SDSSJ0946%2B1006>

- a) Rispondete alle tre domande seguenti su questa immagine:
- Quale tipo di effetto di lente gravitazionale è alla base di questa osservazione e perché?
 - Quali condizioni permettono la formazione di questa immagine di anelli? Disegnate con precisione la traiettoria dei raggi delle sorgenti.
 - La sorgente del secondo anello non sarebbe osservabile senza l'effetto lente. Perché?
- b) A partire dai redshift della lente e del primo anello, calcolare le distanze
1. tra l'osservatore e la lente (D_{LO});
 2. tra l'osservatore e la sorgente del primo anello (D_{SO});
 3. dedurre la distanza tra l'obiettivo e la sorgente del primo anello (D_{SL}).
- c) Utilizzando i dati relativi al primo anello, calcolare la massa della lente in kg, poi in M_\odot .
- d) Di che tipo di materiale è fatta la massa che si trova nel punto (c)?
- e) Quale altro tipo di lente gravitazionale viene utilizzato per determinare la distribuzione della materia non luminosa nello spazio tra le galassie?

⁷R. Gavazzi *et al.*, *The Sloan Lens ACS Survey. VI: Discovery and analysis of a double Einstein ring* (2008), <https://arxiv.org/abs/0801.1555>.

5 Buchi neri

Esercizio 1: Energia potenziale gravitazionale

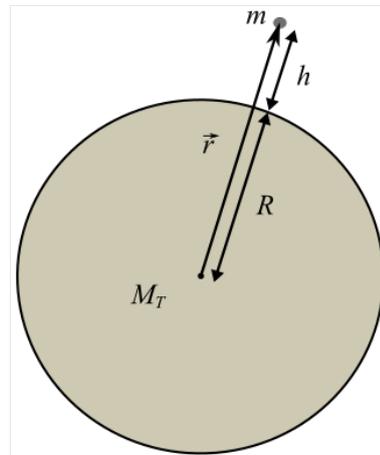
Nel primo biennio, avete imparato che l'energia potenziale gravitazionale di un oggetto sulla superficie terrestre è $E_g(h) - E_g(0) = E_g(r) - E_g(R) = mgh$ dove h è la sua altezza sopra la superficie terrestre ($h = r - R$, dove r è la distanza dal centro della Terra e R è il raggio della Terra) e m è la sua massa.

Questa formula è valida solo se h è trascurabile rispetto al raggio della Terra. In questo modo $g = GM_T/r^2$ può essere considerata una costante, in effetti:

$$r = R + h \cong R \quad \Rightarrow \quad g \cong GM_T/R^2.$$

Altrimenti, si dovrebbe usare l'espressione più generale per l'energia potenziale gravitazionale, che è (vedasi corso)

$$E_g(r) = -\frac{GM_T m}{r}.$$



Dimostrate che, se $h \ll R \Rightarrow r = R + h \cong R$, allora $E_g(r) - E_g(R) \cong mgh$, dove $g = GM_T/R^2$ (secondo la definizione dell'accelerazione di gravità terrestre).

Suggerimento: sviluppate la differenza algebricamente:

$$\begin{aligned} E_g(r) - E_g(R) &= -\frac{GM_T m}{r} + \frac{GM_T m}{R} = -\frac{GM_T m}{R+h} + \frac{GM_T m}{R} \\ &= \frac{\dots}{(R+h) \cdot R} = \dots \cong mgh. \end{aligned}$$

Esercizio 2: Velocità di fuga

Calcolate la velocità di fuga per un oggetto lanciato dalla:

1. superficie della Terra,
2. superficie di Marte,
3. superficie della Luna.

Esercizio 3: La composizione chimica dell'atmosfera dei pianeti

La temperatura (in K) di un gas è direttamente proporzionale all'energia cinetica media delle sue particelle. Se trascuriamo i movimenti di vibrazione e di rotazione delle particelle, questa proporzionalità si traduce nella relazione

$$E_{\text{cin}} = \frac{3}{2}k_B T$$

dove k_B è la costante di Boltzmann : $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K (Appendice E).

- Utilizzando la formula dell'energia cinetica di una particella di massa m e velocità v e la relazione di proporzionalità tra E_{cin} e T , esprimete la velocità media delle particelle di un gas in funzione della temperatura del gas e della massa della particella: $v_T(m; T)$. Questa velocità è chiamata **velocità termica** del gas.
- Calcolate il valore della velocità termica dell'ossigeno alla temperatura media sulla superficie terrestre: 15 °C, chiamata $v_T(O_2; 15 \text{ °C})$. Questa velocità è maggiore o minore per l'idrogeno H_2 ? E per l'azoto N_2 ? *Per l'azoto e per l'idrogeno, rispondete senza eseguire calcoli.*
- Confrontate questa velocità con la velocità di fuga della Terra, calcolando il rapporto

$$\eta_{\text{Terra}} = \frac{v_T(O_2; 15 \text{ °C})}{v_{\text{fuga Terra}}}.$$

- Ripetete gli stessi calcoli che ai punti b) e c) ma per la Luna al momento della sua formazione, sapendo che la temperatura media sulla Luna in quel momento (4 miliardi di anni fa) era di circa 2000 °C (1 cifra significativa).
- Spiegate perché la Luna non ha atmosfera.

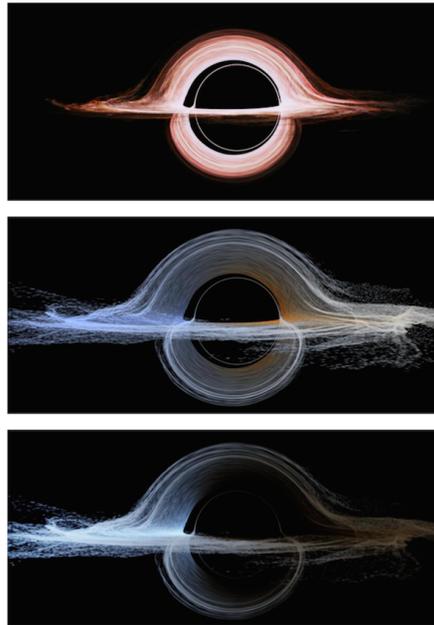
Link utile per i prossimi esercizi: tabella delle ODG per le densità
[https://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_\(density\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Orders_of_magnitude_(density))

Video:

- Simulazione della collisione tra due buchi neri:
<http://apod.nasa.gov/apod/ap151020.html>
- Una stella inghiottita da un buco nero:
<http://apod.nasa.gov/apod/ap151028.html>

Esercizio 4: Il raggio di Schwarzschild

La figura seguente mostra Gargantua, il buco nero del film "Interstellar": come appare nel film (immagine in alto) e secondo il risultato della simulazione numerica basata sulle equazioni della relatività generale (le due immagini in basso). In tutte e tre le immagini, il buco nero è in rotazione (in senso antiorario se visto dall'alto) e il suo disco di accrescimento, composto da materia radiante che precipita verso il buco nero e che ruota anche ad alta velocità.



Fonte: O. James *et al.*, Class. Quantum Grav. 32 065001 (2015).

- Indicate qual è il raggio di Schwarzschild in ciascuna delle immagini di Gargantua e spiegare perché l'immagine del buco nero è avvolta sotto e sopra da un disco luminoso.
- Spiegate perché nelle immagini più realistiche il disco di accrescimento mostra sfumature di blu o rosso.
- Calcolate il raggio di Schwarzschild di Gargantua, la cui massa è 100 milioni di volte quella del Sole.
- Effettuate gli stessi calcoli della lettera c) ma per un buco nero della massa del Sole, poi della massa della Terra.
- Quale sarebbe la densità della Terra se tutta la sua massa fosse concentrata nel suo raggio di Schwarzschild? Esistono oggetti conosciuti con questa densità?

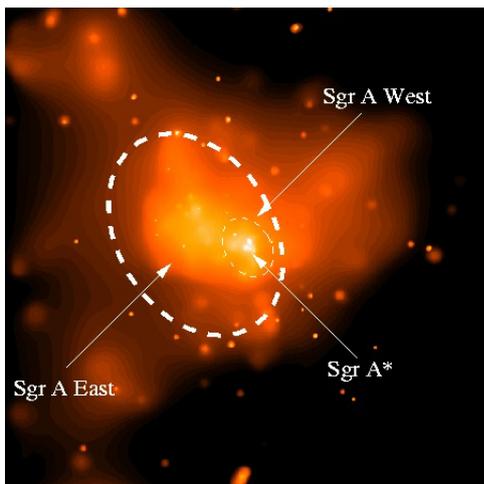
Esercizio 5: Il buco nero supermassivo in Sgr A*

Supponiamo che S2 abbia un moto circolare uniforme (UCM) di raggio $r \approx 1000$ UA – 10 volte maggiore del suo perielio – e che la sua velocità scalare sia costante e pari alla velocità scalare media di un'orbita: $v = v_m \approx 2 \cdot 10^6$ m/s (si veda l'esercizio relativo nella Serie 1). Sappiamo anche che la massa di questa stella è di diversi ordini di grandezza inferiore a quella del buco nero al centro dell'orbita: $m \ll M$.

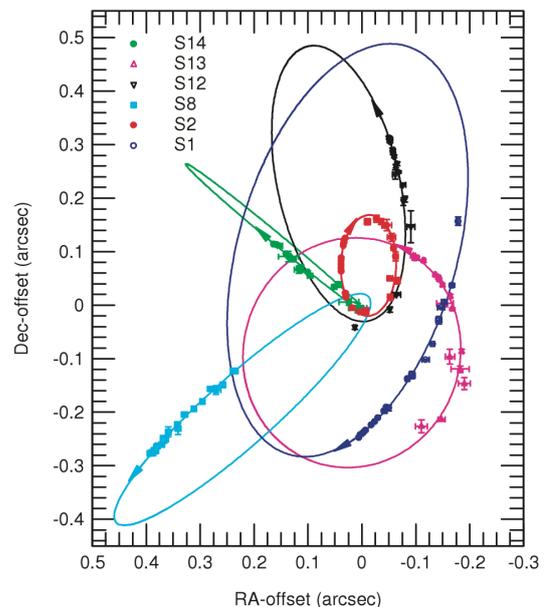
- Utilizzando le leggi di Newton per il MCU, stimare la massa contenuta nell'orbita di S2, in kg e in M_\odot .
- Calcolare il raggio di Schwarzschild di tale massa e confrontarlo con il raggio dell'orbita di S2.
- Sappiamo che il perielio di un'altra stella che orbita attorno al buco nero supermassivo, S14 (noto anche come S0-16), è di 45 UA. Perché possiamo dire che la massa contenuta nell'orbita di queste due stelle è un buco nero?

Gli astronomi hanno potuto seguire una rotazione completa di S2 intorno a Sgr A* dal 1995 al 2010, consentendo di stimare la massa del buco nero supermassivo nel nucleo della nostra galassia a circa $4,2 \cdot 10^6 M_\odot$. Questa scoperta è stata premiata con il Premio Nobel per la Fisica nel 2020.

https://www.e-education.psu.edu/astro801/content/l8_p7.html.



Fonte: NASA Chandra X-Ray Observatory e Penn State University.



Fonte: Eisenhauer et al., 2005, ApJ 628, 246

Esercizio 6: NCG1232 attraverso un buco nero

Le due immagini successive mostrano la stessa galassia, NCG1232, con un redshift di $z = 0,0053$.



Fonte: Application Copyright 2024, P. Lutus, <http://arachnoid.com/relativity/index.html> e https://it.wikipedia.org/wiki/NGC_1232

A sinistra, NCG1232 appare come la osserviamo ora; a destra appare come la osserveremmo se un buco nero di $4,3 \cdot 10^6 M_{\odot}$ si trovasse a metà strada tra noi (l'osservatore, O) e NCG1232 (la sorgente, S).

- a) Rispondete ai seguenti punti :
1. Qual è il fenomeno che spiega la formazione dell'immagine a destra?
 2. Disegnate un diagramma che mostri le posizioni di S, O e del buco nero e il percorso dei raggi luminosi.
 3. Qual è il nome del cerchio di luce osservato nell'immagine a destra e quali sono le condizioni per la formazione di tale cerchio?
 4. Come cambierebbe l'immagine a destra se il buco nero non avesse una perfetta simmetria sferica?
- b) Esprimete la massa del buco nero in kg (unità SI).
- c) Calcolate il raggio di Schwarzschild del buco nero e la sua densità media.
- d) Dal redshift di NCG1232, determinate la distanza tra noi (O) e NCG1232 (S). Deducete la distanza tra O e il buco nero e la distanza tra il buco nero e S. Esprimete tutte queste distanze in Mpc poi in m.
- e) Calcolate il raggio di Einstein nell'immagine a destra, esprimendo il risultato in secondi d'arco.

Esercizio 7: Il nostro universo è un buco nero?

- a) Scrivete la formula che esprime la densità media di un buco nero in funzione della sua massa $\rho_{\text{bn}}(M)$. Essa è una funzione di M costante, crescente o decrescente?
- b) Da questa formula determinate l'ordine di grandezza della densità di un buco nero con una massa pari a:

1. una tonnellata: $\rho_{\text{bn}}(1 \text{ t})$;
2. quella della Terra: $\rho_{\text{bn}}(M_{\text{Terra}})$;
3. quella di una grande stella (circa 10 volte la massa del Sole): $\rho_{\text{bn}}(10 M_{\odot})$;
4. quella di Gargantua: $\rho_{\text{bn}}(10^8 M_{\odot})$;
5. quella del nucleo della nostra galassia, SgrA*: $\rho_{\text{bn}}(4,2 \cdot 10^6 M_{\odot})$;
6. quella di una sfera con raggio pari al raggio di Hubble $r_H = c/H_0$ e densità media pari alla densità critica $\rho_c \approx 9 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$.

Suggerimento: con la densità critica, trovate prima la massa contenuta nel raggio di Hubble: M_H , poi calcolare $\rho_{\text{bn}}(M_H)$.

- c) Calcolate algebricamente il risultato del punto (6) (risultato sotto forma di espressione letterale), sapendo che la formula per la densità critica è (Capitolo 7)

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}.$$

Esercizio 7: Temperatura di SgrA*

- a) Qual è la temperatura del buco nero di Sgr A* nel nucleo della Via Lattea?
- b) Tenendo conto della temperatura media dell'universo attuale, perché questo buco nero non può emettere della radiazione di Hawking?
- c) Quale dovrebbe essere la massa di un buco nero affinché la sua temperatura sia paragonabile a quella dell'universo attuale? E il suo raggio di Schwarzschild?

Esercizio 8: La cometa Shoemaker-Levy 9

La collisione della cometa SL9 (Shoemaker-Levy 9) con Giove è stata osservata dal telescopio Hubble nel luglio 1994. Prima dell'impatto, le forze di marea subite dalla cometa ne hanno provocato la disgregazione, creando una scia scintillante di 21 frammenti che si sono schiantati sul pianeta rosso. Due anni prima dello spettacolare evento del 1994, l'orbita ellittica di SL9 aveva già raggiunto una distanza molto ravvicinata da Giove, a circa 40'000 km dalla sua superficie. Gli scienziati ipotizzano che le forze di marea abbiano frammentato la cometa durante questo primo passaggio ravvicinato.



Fotografia composta dei frammenti di SL9 con Giove. Fonte: <https://solarsystem.nasa.gov/sl9/>.

Video che simula l'evento <https://youtu.be/wtYfGN-3yc?si=CUDXHtUV3Huugwe>

- Assumendo che SL9 sia una sfera di diametro $d = 5$ km e massa $m = 8$ miliardi di tonnellate, stimare la forza di marea assiale subita dalla cometa SL9 mentre si avvicinava a Giove nel 1992.
- Quale sarebbe la stessa forza di marea, nella stessa posizione, sperimentata da una persona di massa $m = 60$ kg e altezza $h = 1,7$ m situata perpendicolarmente alla superficie del pianeta rosso?
- Quale sarebbe la stessa forza di marea, nella stessa posizione, sperimentata dalla stessa persona al punto (b) se la massa di Giove fosse concentrata nel suo raggio di Schwarzschild? Date una risposta qualitativa, senza eseguire calcoli.
- Quale sarebbe la forza di marea sperimentata dalla stessa persona di cui al punto (b) se la massa di Giove fosse concentrata nel suo raggio di Schwarzschild e la persona si trovasse nella posizione $r = 1,1$ km dal suo centro?

Esercizio 9: Effetto di marea e temperatura di SgrA*

- Calcolare la forza di marea assiale su un veicolo spaziale di massa $m = 25,0$ tonnellate e dimensione assiale $L = 18,0$ m che si avventura a 1,50 km dall'orizzonte degli eventi del buco nero SgrA* nel nucleo della Via Lattea.
- Qual è la temperatura del buco nero Sgr A* nel nucleo della Via Lattea?
- Tenendo conto della temperatura media dell'universo attuale, perché questo buco nero non può emettere radiazione di Hawking?



L'Atacama Large Millimeter/submillimeter Array (ALMA) punta Sagittarius A*. L'inserito mostra l'immagine radio di Sagittarius A* ripresa dalla collaborazione Event Horizon Telescope (EHT) nel 2021. Situato nel deserto di Atacama in Cile, ALMA è l'osservatorio più sensibile della rete EHT. Fonte: ESO/José Francisco Salgado (josefrancisco.org), EHT Collaboration.

- Quale dovrebbe essere la massa di un buco nero perché la sua temperatura sia paragonabile a quella dell'universo attuale? E il suo raggio di Schwarzschild?

Esercizio 10: Un'onda di marea sul pianeta Miller

Nel film *Interstellar*, quando gli astronauti scendono nell'atmosfera del pianeta di Miller - in orbita attorno al buco nero Gargantua - la loro prima visione rivela nuvole e un oceano simile alla Terra. All'atterraggio, scoprono che l'oceano è profondo solo mezzo metro e, in lontananza, vedono quella che sembra essere una vasta catena montuosa. In seguito, scoprono che si tratta di un'enorme onda di marea, creata dalle potenti forze di marea esercitate da Gargantua sul pianeta.

Si suppone che Miller abbia la stessa massa e lo stesso diametro della Terra e che si trovi a una distanza dal centro di Gargantua pari a 10 volte il suo raggio di Schwarzschild. Ricordiamo che la massa del buco nero è di $10^8 M_{\odot}$ (vedi es. 4 di questa serie).

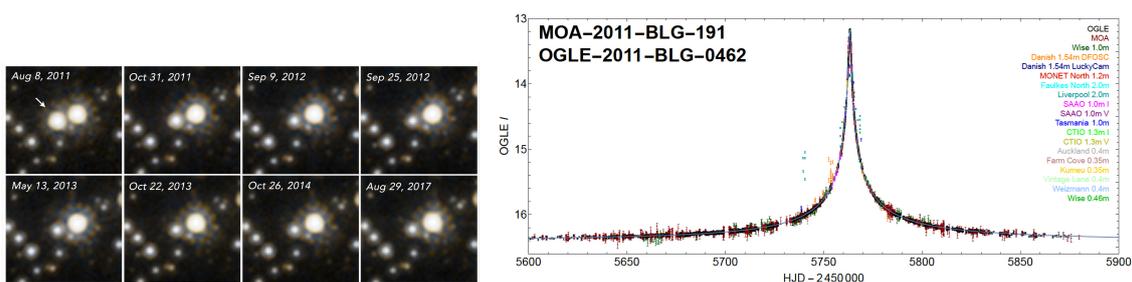


A sinistra: vista di Gargantua dal pianeta Miller. A destra: scena del l'onda mareal sul pianeta. Fonte: Il film Interstellar.

- Stimare la forza di marea assiale creata da Gargantua sul pianeta Miller.
- Confrontare il risultato di (a) con la forza di marea della Luna sulla Terra:
 $F_{\text{marea, Luna/Terra}} = 6,5 \cdot 10^{18} \text{ N}$, che causa le maree terrestri (vedi Appendice B.3).
- Quale sarebbe la forza di marea assiale subita da Miller se si trovasse all'orizzonte degli eventi di Gargantua?

Esercizio 11: Il buco nero solitario

Le immagini seguenti sono tratte da uno studio⁸ pubblicato nel luglio 2022. La prima è una sequenza di immagini della stessa stella (chiamata “OGLE-2011” e indicata dalla freccia nella prima foto in alto a sinistra) in date diverse tra il 2011 e il 2017. Si può notare che la sua luminosità è aumentata improvvisamente nell'agosto 2011, per poi affievolirsi nei mesi successivi. La seconda è un grafico relativo della luminosità della stella in funzione del tempo su 300 giorni, centrato sull'agosto 2011.



Questo aumento di luminosità è spiegato dall'effetto di lente gravitazionale creato dal passaggio, tra noi e OGLE-2011 (la sorgente), di un buco nero chiamato “MOA-2011”. La tabella seguente, tratta dallo stesso studio, riassume i dati⁹ di questo evento.

⁸Kailash C. Sahu *et al.*, *An Isolated Stellar-mass Black Hole Detected through Astrometric Microlensing*, <https://arxiv.org/abs/2201.13296>.

⁹mas = millesimo di secondo d'arco

Table 6. Properties of the MOA-11-191/OGLE-11-462 Black Hole Lens

Property	Value	Sources & Notes ^a
Mass, M_{lens}	$7.1 \pm 1.3 M_{\odot}$	(1)
Distance, D_L	1.58 ± 0.18 kpc	(2)
Einstein ring radius, θ_E	5.18 ± 0.51 mas	(3)
Proper motion, $(\mu_{\alpha}, \mu_{\delta})$	$(-4.36 \pm 0.22, +3.06 \pm 0.66)$ mas yr ⁻¹	(4)
Galactic position, (X, Y, Z)	$(-4, -1580, -45)$ pc	(5)
Space velocities, (V, W)	$(+3, +40)$ km s ⁻¹	(6)

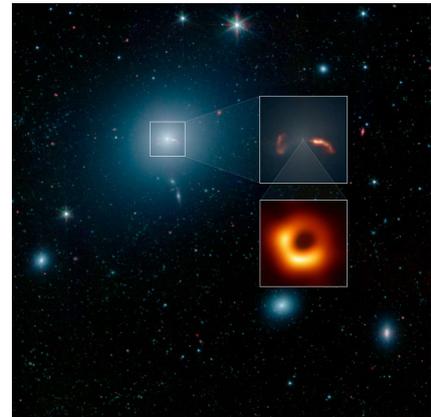
Utilizzando i dati della tabella, rispondere alle seguenti domande:

- Di che tipo di effetto di lente gravitazionale si tratta e perché?
- La lente di questo sistema si trova nella nostra galassia? Giustificate utilizzando i dati della tabella *senza* fare calcoli.
- A questa distanza da noi, l'espansione dell'universo può essere trascurata? Giustificate questa affermazione.
- Come vengono classificati i buchi neri e a quale di queste categorie appartiene MOA-2011?
- Calcolate (1) il raggio di Schwarzschild e (2) la densità media di MOA-2011.
- Quale sarebbe l'ODG della densità di un buco nero 1000 volte più massiccio del MOA-2011?
- Calcolate la temperatura del MOA-2011. Può evaporare nel nostro universo?

Esercizio 12: Messier 87*

L'immagine a fianco mostra una panoramica della galassia Messier 87 (M87) e delle sue vicine. Dal centro di questa galassia partono due getti opposti di particelle, come si può vedere nel primo ingrandimento (in alto), in rosso e arancione.

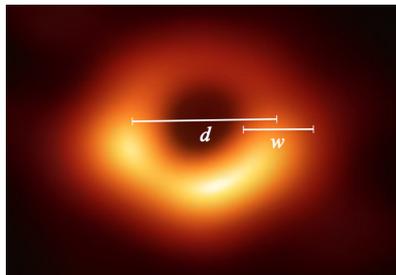
Il secondo ingrandimento (in basso) mostra l'immagine della sorgente di onde radio M87*, contenente il buco nero supermassiccio che è la fonte di questi getti. La radiazione osservata è quella inviata dal disco di accrescimento del buco nero in rotazione. L'asse di rotazione del buco nero rispetto all'osservatore (la Terra) è mostrato nel diagramma sotto.



Fonte: NASA, JPL-Caltech, IPAC, Event Horizon Telescope (EHT).



- a) Spiegate cos'è un buco nero supermassivo: in cosa si differenzia da un buco nero stellare?
- b) Spiegate perché l'immagine del disco di accrescimento è un anello, anche se il suo asse di rotazione non è rivolto verso l'osservatore. Di quale fenomeno si tratta? (Se necessario, disegnate un diagramma).



Fonte: Jifeng, L. *et al.*, Nature, Vol. 575, 618–621 (2019).

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL LETTERS, 875:L1 (17pp), 2019 April 10

Table 1
Parameters of M87*

Parameter	Estimate
Ring diameter ^a d	$42 \pm 3 \mu\text{as}$
Ring width ^a w	$< 20 \mu\text{as}$
Crescent contrast ^b	$> 10:1$
Axial ratio ^a	$< 4:3$
Orientation PA	$150^\circ\text{--}200^\circ$ east of north
$\theta_g = GM/Dc^2$ ^c	$3.8 \pm 0.4 \mu\text{as}$
$\alpha = d/\theta_g$ ^d	$11^{+0.5}_{-0.3}$
M^e	$(6.5 \pm 0.7) \times 10^9 M_\odot$
Parameter	Prior Estimate
D^e	$(16.8 \pm 0.8) \text{ Mpc}$
$M(\text{stars})^e$	$6.2^{+1.1}_{-0.4} \times 10^9 M_\odot$
$M(\text{gas})^e$	$3.5^{+0.9}_{-0.3} \times 10^9 M_\odot$

Notes.
^a Derived from the image domain.
^b Derived from crescent model fitting.
^c The mass and systematic errors are averages of the three methods (geometric models, GRMHD models, and image domain ring extraction).
^d The exact value depends on the method used to extract d , which is reflected in the range given.
^e Rederived from likelihood distributions (Paper VI).

Per i calcoli che seguono, utilizzate i dati riportati di seguito:

Massa del buco nero: $M = 6,5 \cdot 10^9 M_\odot$

Distanza dalla Terra a M87*: $D = 16,8 \text{ Mpc}$

Diametro (angolare) dell'anello di Einstein = Ring diameter: $d = 42 \cdot 10^{-6} ''$

Spessore (angolare) dell'anello di Einstein = Ring width: $w = 20 \cdot 10^{-6} ''$

- c) Esprimete in radianti,
- Il raggio di Einstein θ_E ;
 - il raggio angolare della zona d' "ombra" all'interno dell'anello, θ_{ombra} .
- d) Calcolate il raggio di Schwarzschild del buco nero in metri.
- e) La superficie degli eventi del buco nero è all'interno della zona d' "ombra"?
- f) Qual è la densità del buco nero? Quali sostanze hanno una densità dello stesso ordine di grandezza?

- g) Calcolate la temperatura di Hawking di questo buco nero. Confrontate questa temperatura con la temperatura media dell'universo: questo buco nero può evaporare emettendo radiazione di Hawking?

Esercizio 13: Tempi di evaporazione

Quando ci limitiamo alla fisica classica (newtoniana o relativistica), un buco nero è un oggetto che attrae sempre massa/energia e non ne rilascia alcuna. Abbiamo l'impressione che qualsiasi informazione fisica contenuta in ciò che inghiotte sia "perduta", ad eccezione di tre quantità fisiche (indipendenti) che definiscono univocamente questo oggetto.

- Quali sono queste tre quantità?
- Determinate l'ordine di grandezza del tempo di evaporazione di un buco nero di (1) $M_{\text{in}} = 1 \text{ kg}$, (2) $M_{\text{in}} = M_{\text{Terra}}$ e (3) $M_{\text{in}} = 10 M_{\odot}$.
- Quale dovrebbe essere la massa iniziale di un buco nero per farlo evaporare in un periodo di tempo dell'ordine dell'età dell'universo, $t_{\text{evap}} \sim 10^{10}$ anni?

Esercizio 14: Il buco nero del CERN

L'LHC (Large Hadron Collider) al CERN può accelerare i protoni fino ad un'energia cinetica di $E_k = 13 \text{ TeV}$.

- Convertite questa energia in Joule.
- Se fosse possibile convertire completamente tutta questa energia cinetica in energia di massa, quale sarebbe la massa della particella così creata?
- Quale sarebbe il raggio di Schwarzschild e la densità di un buco nero di questa massa?
- Quale sarebbe il tempo di evaporazione stimato di un tale buco nero?

Video della simulazione di un ipotetico buco nero stabile prodotto al CERN:

http://www.dailymotion.com/video/x7erd3_le-trou-noir-du-cern_tech

Esercizio 15: Avvicinarsi a una stella di neutroni

Immaginiamo che una persona di altezza $h = 170 \text{ cm}$ e massa $m = 65 \text{ kg}$ si porti a una distanza di $5,0 \text{ km}$ dalla superficie di una stella di neutroni per un periodo di due giorni, al fine di determinare l'effetto di ringiovanimento (temporale) della gravità. Per la stella di neutroni utilizzare $M = 2,0 M_{\odot}$ e $R = 10 \text{ km}$.

- a) Quale sarebbe la forza assiale di marea su questa persona? Potrebbe sopravvivere?
- b) Se questo viaggio fosse stato possibile, quanto sarebbe stata più giovane al suo ritorno, rispetto alle sue controparti terrestri?
- c) Dove si dovrebbe andare per ottenere lo stesso effetto temporale, ma senza gli effetti stravolgenti delle maree gravitazionali? Spiegate la vostra risposta calcolando la forza assiale di marea nel luogo proposto.

Esercizio 16: Viaggio nel tempo

- a) Quanto lontano dalla superficie di un buco nero da $10 M_{\odot}$ dovrebbe stare questo insegnante di 55 anni per un anno perché i suoi alunni di 16 anni abbiano la sua età al suo ritorno?
- b) Se, durante il viaggio, invia un “selfie” ai suoi alunni a una frequenza di 20 MHz, a quale frequenza dovrebbe essere rilevato questo segnale sulla Terra?

Esercizio 17: Dove si trova il pianeta Miller?

Secondo le informazioni del film *Interstellar*, per ogni ora trascorsa sul pianeta Miller, in orbita attorno a Gargantua, passano sette anni nello spazio lontano dal buco nero (quindi anche sulla Terra). Calcolare il rapporto tra la distanza di Miller dal centro di Gargantua e il raggio di Schwarzschild del buco nero r/r_S . Questo risultato è compatibile con le immagini del pianeta di Miller?

Per la massa di Gargantua, usare $M = 1.989\,100\,000 \cdot 10^{38}$ kg, o circa 100 milioni di M_{\odot} .



Vista di Gargantua e del suo pianeta Miller. Fonte: Film *Interstellar*.

Esercizio 18: Il ritorno di Cooper

Nel 2170, il pilota Cooper è tornato a visitare il buco nero Gargantua ($M = 1,0 \cdot 10^8 M_{\odot}$). Percorre l'andata e ritorno dalla Terra con una navetta che viaggia a una velocità costante di $0,90c$ rispetto al Sistema Solare. Secondo l'orologio del pilota, il viaggio di andata dura 1h 30', dopodiché Cooper mantiene una distanza di $r = 3,0 \cdot 10^8$ km dal centro del buco nero per 2h 45'. Infine, ritorna sulla Terra alla stessa velocità del viaggio di andata per 1h 30' (sempre secondo il suo orologio).

- a) Quanto tempo è trascorso per un osservatore a riposo sulla Terra durante l'assenza di Cooper?
- b) Qual è la distanza tra la Terra e Gargantua, nel sistema di riferimento del Sistema solare? Esprimere il risultato in m e in $AU = 1,5 \cdot 10^{11}$ m.

Esercizio 19: Sfasamento temporale del GPS

I satelliti GPS orbitano intorno alla Terra ad un'altezza $h = 20,2 \cdot 10^6$ m sulla superficie terrestre. La loro velocità media è di $3,89 \cdot 10^3$ m/s. Vogliamo scoprire quale differenza c'è tra il tempo misurato dall'orologio di un osservatore sulla superficie terrestre (considerato a riposo) e quello misurato da un orologio che viaggia su un satellite GPS.

Effetto della relatività ristretta:

- a) Calcolate, per ogni secondo, quanto l'orologio satellitare GPS ritarda rispetto all'orologio di un osservatore sulla Terra a causa della velocità del satellite.

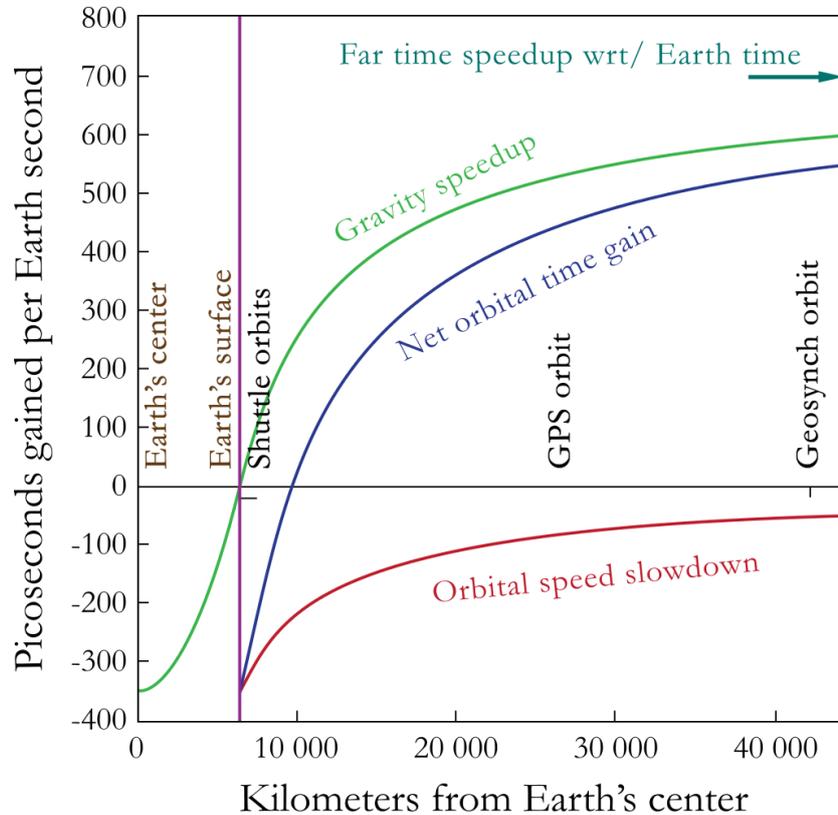
Effetto della relatività generale:

- b) Calcolate, per ogni secondo, quanto l'orologio di un osservatore sulla superficie terrestre ritarda rispetto a un osservatore nello spazio a una distanza infinita dalla Terra e da qualsiasi altra massa, a causa della gravitazione.
- c) Ripetete lo stesso calcolo del punto precedente, ma per il ritardo dell'orologio satellitare GPS rispetto ad un osservatore nello spazio ad una distanza infinita dalla Terra e da qualsiasi altra massa, a causa della gravitazione.
- d) Dai due calcoli precedenti, deducete l'avanzamento dell'orologio del satellite GPS ad ogni secondo rispetto a quello di un osservatore sulla Terra, dovuto alla gravitazione (relatività generale).

Effetto relativistico globale:

- e) Combinando gli effetti della relatività ristretta e generale, qual è il bilancio del ritardo temporale tra il tempo misurato da un satellite GPS e un osservatore sulla Terra ?
- f) Se la distanza tra i satelliti e la superficie terrestre h aumenta, gli effetti dei contributi (i) della relatività ristretta, (ii) della relatività generale e (iii) del totale aumentano o diminuiscono? Confrontate i risultati con il seguente grafico.

Time Dilation Effects on Earth



Fonte: P. Fraundorf Derivative work, Spotsaurian

https://en.wikipedia.org/wiki/Error_analysis_for_the_Global_Positioning_System#/media/File:Orbit_times.svg

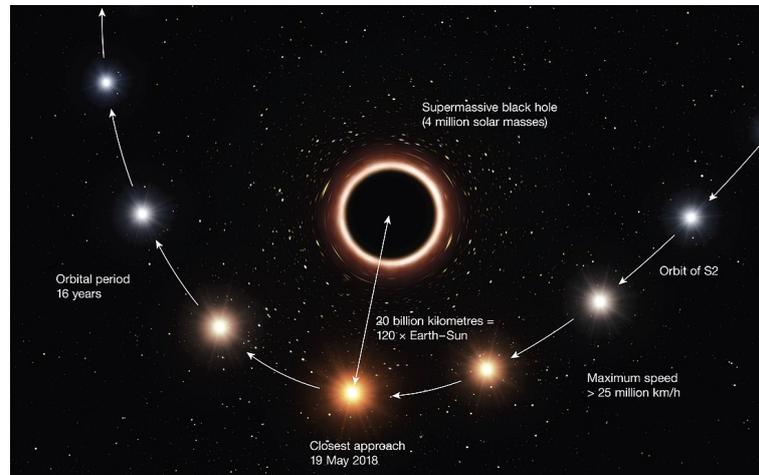
Vedasi anche:

<https://demonstrations.wolfram.com/RelativisticEffectsOnSatelliteClockAsSeenFromEarth/>

Esercizio 20: Orbite ellittiche intorno a Sgr A*

Dalle orbite ellittiche di alcune stelle intorno al centro della Via Lattea, gli astronomi hanno potuto determinare la presenza del buco nero Sgr A*. In particolare, l'orbita della stella S2 (la ricostruzione nella figura sottostante mostra parte della sua orbita) è stata seguita per tutto il suo periodo di 16,05 anni, tra il 1995 e il 2011. Il suo perielio si trova a una distanza di $r_p = 1,761 \cdot 10^{13}$ m e la sua eccentricità è $e = 0,885$.

- a) Dai dati sull'orbita di S2, determinare la massa di Sgr A*. Esprimere il risultato in kg e in masse solari.



Fonte: ESO/M. Kornmesser.

- b) Di che tipo di buco nero stiamo parlando?
- c) Calcolare l'intensità della velocità di S2 al perielio e all'afelio.
- d) Qual è il raggio di Schwarzschild di Sgr A*? Esprimere il risultato in m e in raggi solari ($R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$ m).
- e) Calcolare la densità media di Sgr A* e confrontarla con quella di un buco nero stellare.
- f) Qual è la temperatura di Hawking di Sgr A*? Può evaporare nel nostro universo attuale?
- g) Se la temperatura circostante fosse sufficientemente bassa, quanto tempo impiegherebbe Sgr A* per evaporare completamente (indicare l'ordine di grandezza)? Confrontate il risultato con l'ordine di grandezza dell'età dell'universo (14 miliardi di anni).

6 Equazioni cosmologiche

Esercizio 1: La costante cosmologica di Einstein

- a) Riscrivete la prima equazione cosmologica in un universo dominato dalla sola materia, esplicitando il termine contenente la velocità del fattore di scala $\dot{a}^2(t)$. Spiegate perché oggi, al tempo t_0 , questa equazione non ammette una soluzione statica. Ricordiamo che $a(t_0) = a_0 = 1$.
- b) All'inizio del XX secolo l'idea che l'universo non sia statico era difficile da accettare. Per questo motivo Einstein introdusse un termine nella prima equazione cosmologica: la costante cosmologica Λ_E . Riscrivete la prima equazione cosmologica per l'universo dominato dalla materia, ma con l'aggiunta del termine Λ_E . Quanto dovrebbe valere Λ_E oggi (al tempo t_0) perché l'universo sia statico? Sarebbe un valore positivo o negativo? *Assumete per la densità di materia oggi (inclusa la materia oscura) il valore $\rho_{m0} = 10^{-27}$ kg/m³.*
- c) Dimostrate che – anche se oggi l'universo fosse statico ($\dot{a}(t_0) = 0$) – esso sarebbe instabile: un valore di velocità infinitesimale ($\dot{a}(t_0) = \epsilon \ll 1$) implicherebbe un'accelerazione $\ddot{a}(t_0)$ non zero. Cosa si può dedurre da questo?

Per ottenere l'accelerazione del fattore di scala \ddot{a} , derivate la prima equazione cosmologica rispetto al tempo.

Esercizio 2: In un altro universo

Immaginiamo che esista un universo riempito solo di una forma di materia/energia la cui densità si evolve come segue:

$$\rho = \frac{b}{a^5(t)}$$

dove b è una costante. Si ipotizza inoltre che l'universo sia piatto.

- a) Calcolare la variazione del fattore di scala in funzione del tempo, $a(t)$ (si ricorda che, al tempo $t = 0$, anche il parametro $a = 0$).
- b) Per quali valori di t questo universo ha una velocità di espansione positiva o negativa? Per quali valori di t l'espansione accelera o decelera?
- c) Calcolare l'evoluzione del parametro di Hubble in funzione del tempo, $H(t)$.
- d) Calcolare la variazione di densità in funzione del tempo $\rho(t)$, quindi esprimerla in funzione di a per verificare che si trovi la relazione iniziale ($\rho = b/a^5(t)$).
- e) Utilizzare la seconda equazione cosmologica per trovare l'equazione di stato di questa forma di energia e confrontarla con l'equazione di stato di un gas di fotoni.

Esercizio 3: La giusta distanza

- a) Per la stessa sorgente con redshift z_s , scrivete le formule
1. della distanza comovente D_0 ,
 2. della distanza propria al momento dell'emissione D_{em} e
 3. della distanza di traversata D_T .

- b) scegliete la risposta corretta e giustificate la scelta fatta:

La distanza percorsa D_T è

- più piccola di D_{em} .
 - tra D_{em} e D_0 .
 - più grande di D_0 .
- c) Integrate ciascuna delle formule scritte in (a), nel caso $\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$ e scoprite quale sia il comportamento (il limite) in funzione di z_s quando $z_s \rightarrow \infty$.
- d) Le approssimazioni fatte in (c) sono ragionevoli per le sorgenti ad alto redshift osservate, con $z_s \approx 10$?
- e) Calcolate la quantità $D_T(z_e)/c$ ottenuta al punto c) per $z_s \rightarrow \infty$. Cosa rappresenta?

Esercizio 4: Età dell'universo (metodo numerico)

Usate gli ultimi risultati¹⁰ di misura per i parametri H_0 , Ω_m e Ω_Λ per calcolare, a partire dalla formula della distanza di attraversamento,

- a) l'età dell'universo e
- b) quanto tempo fa la costante cosmologica cominciò a dominare l'espansione (usate $z_\Lambda = 0,3$).

Eseguite l'integrazione numericamente utilizzando ad esempio Python, Octave o Scilab.

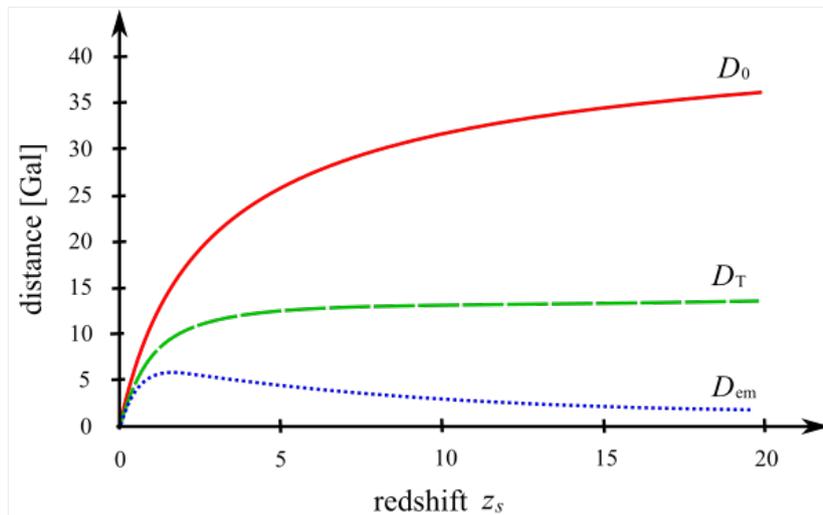
¹⁰https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model

Esercizio 5: Evoluzione della distanza propria della trasmissione

Il grafico sotto mostra, in funzione del redshift, D_0 (linea solida rossa), D_T (linea tratteggiata verde) e D_{em} (linea tratteggiata blu) ottenuti per integrazione numerica, con

$$H_0 = 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} \quad , \quad \Omega_{\Lambda 0} = 0,7 \quad \text{e} \quad \Omega_{m0} = 0,3 \quad .$$

Mentre per piccole z_s queste tre distanze tendono ad essere uguali, per grandi z_s la differenza tra loro diventa sempre maggiore, e iniziano a differire prima di $z_s = 1$. Come abbiamo già visto nell'esercizio 2, D_{em} tende a diminuire quando il redshift aumenta abbastanza.

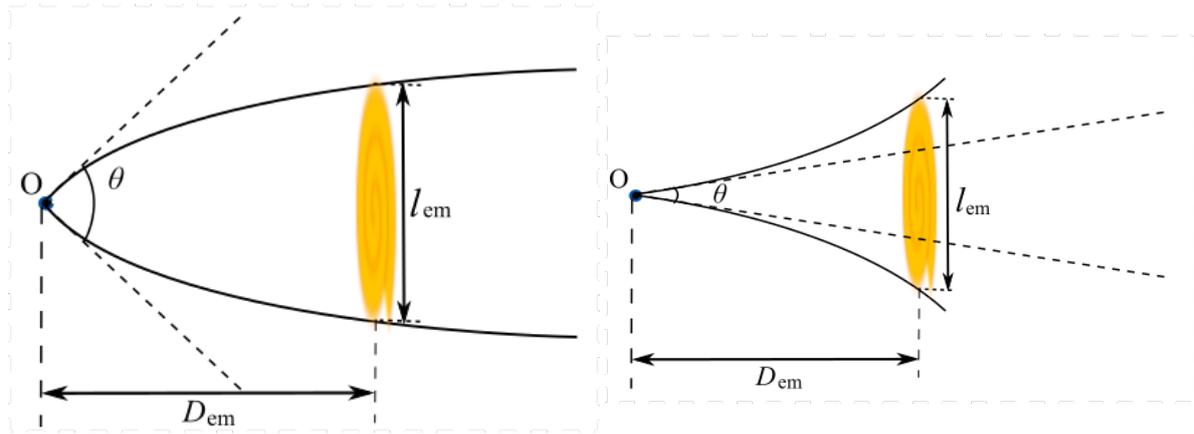


- Quale spiegazione fisica può essere data per questo risultato?
- Assumendo un universo di sola materia ($\Omega_m = 1$) e utilizzando i risultati dell'esercizio 2, determinate a quale redshift la distanza propria al momento dell'emissione sarebbe massima.

Esercizio 6: Distanza del diametro angolare $D_A(z_s)$

La *distanza del diametro angolare* D_A è la distanza apparente di una sorgente dedotta dalla misura del suo diametro angolare θ . Viene utilizzata nelle misurazioni delle dimensioni delle lenti gravitazionali o delle fluttuazioni del CMB.

- Con quale altra distanza cosmologica D_A coincide in un universo piatto in espansione? Scrivete la sua formula integrale in funzione di z_s e dei parametri cosmologici.
- Completate i disegni qui sotto per spiegare perché, in un universo a curvatura non zero, D_A non coincide con D_{em} e specificate in quale caso D_A è più grande o più piccola di D_{em} .



Esercizio 7: Distanza di luminosità in un universo di materia

La formula per la distanza di luminosità di una sorgente a redshift z_s è data da

$$D_L(z_s) = \frac{c(1+z_s)}{H_0} \cdot \int_0^{z_s} \frac{dz}{\sqrt{\Omega_m \cdot (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}.$$

- Confrontate D_L con le altre distanze cosmologiche scritte in (a) dell'esercizio 2: essa è maggiore o minore per un dato z_s ? Come si può spiegare questo fatto?
- Calcolate analiticamente l'integrale della distanza di luminosità quando $\Omega_m = 1$ e $\Omega_\Lambda = 0$ e scoprite come essa si comporta in funzione di z_s quando $z_s \rightarrow \infty$.
- Calcolate analiticamente lo stesso integrale nel caso in cui $\Omega_m = 0$ e $\Omega_\Lambda = 1$ e trovate qual è il suo comportamento in funzione di z_s quando $z_s \rightarrow \infty$.
- Qual è l'effetto della costante cosmologica Ω_Λ sulla distanza di luminosità?

Esercizio 8: Differenza tra le distanze cosmologiche

Le espressioni per le cinque distanze cosmologiche in funzione del redshift sono integrali che possono essere risolti analiticamente con tutti i parametri di densità presi in considerazione (esercizio 9). Tuttavia, ci sono dei programmi che lo fanno numericamente per una sorgente con un dato redshift. Per esempio sul seguente sito:

https://ned.ipac.caltech.edu/help/cosmology_calc.html.

Usando questo programma ricavate le cinque distanze cosmologiche per sorgenti poste a redshift 0,2, 2, 20, 200 rispettivamente. Usate gli ultimi risultati¹¹ di misurazione dei parametri H_0 , Ω_m e Ω_Λ . Cosa possiamo notare ?

z_s	D_L	D_0	D_T	$D_A = D_{em}$
0,20				
2,0				
20				
200				

Esercizio 9: L'energia oscura (metodo numerico)

- Usate gli ultimi risultati¹¹ di misurazione dei parametri H_0 , Ω_m e Ω_Λ e un linguaggio di programmazione adatto (per esempio Python, Octave o Scilab) per disegnare il grafico di $D_L(z_s)$ in Mpc. *Suggerimento: fare il grafico in scala log10.*
- Nello stesso grafico, disegnatte le *due* curve delle funzioni analitiche di $D_L(z_s)$ per $\Omega_m = 1$ e per $\Omega_\Lambda = 1$ (domande (b) e (c) dell'esercizio 6).
- Nello stesso grafico, disegnatte i punti che rappresentano le misure D_L e z_S per le 59 supernovae Ia ottenute nel 1998 dal team del Supernova Cosmology Project¹² riportati nella tabella seguente, dove la magnitudine misurata per ogni supernova è stata convertita in una distanza luminosa.
- Cosa potete dedurre da questo grafico ?

¹¹https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model.

¹²<http://supernova.lbl.gov/>

n	D_L [Mpc]	z_s		n	D_L [Mpc]	z_s		n	D_L [Mpc]	z_s
0	3304	0,458		20	6166	0,828		40	2366	0,416
1	2168	0,354		21	3119	0,450		41	5297	0,830
2	1932	0,425		22	3062	0,430		42	129,4	0,030
3	1600	0,374		23	3565	0,580		43	243,2	0,05
4	2344	0,420		24	5675	0,763		44	119,1	0,026
5	2051	0,372		25	3090	0,526		45	351,6	0,075
6	2377	0,378		26	783,4	0,172		46	130,6	0,026
7	3119	0,453		27	4169	0,619		47	56,75	0,014
8	3357	0,465		28	5546	0,592		48	492,0	0,101
9	3999	0,498		29	3648	0,550		49	78,70	0,020
10	3266	0,655		30	883,1	0,180		50	155,6	0,036
11	2148	0,400		31	3664	0,374		51	241,0	0,045
12	3148	0,615		32	3034	0,472		52	198,6	0,043
13	2831	0,480		33	2366	0,430		53	95,94	0,018
14	2301	0,450		34	4227	0,657		54	326,6	0,079
15	2455	0,388		35	3963	0,612		55	520,0	0,088
16	3266	0,570		36	1706	0,320		56	322,10	0,063
17	3019	0,490		37	3597	0,579		57	335,7	0,071
18	2667	0,495		38	2667	0,450		58	233,3	0,052
19	3750	0,656		39	3006	0,581				

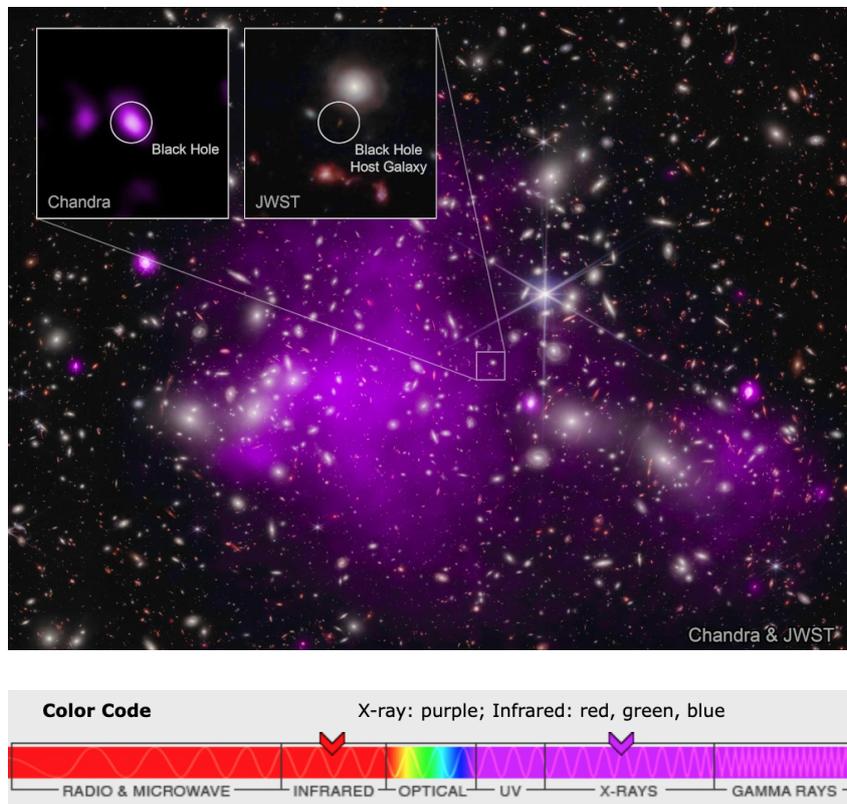
Source: <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9812133v1.pdf>

Esercizio 10: Espressioni analitiche delle distanze cosmologiche

Risolvete analiticamente gli integrali delle distanze cosmologiche in funzione dei parametri di redshift e densità, trascurando i termini di curvatura e di radiazione.

Esercizio 11: Le prime scoperte del JWST

L'immagine sottostante mostra l'ammasso di galassie Abell 2744, il cui redshift è $z_{\text{Abell}} = 0,308$. Grazie all'effetto di lente gravitazionale di questo ammasso, il James Webb Space Telescope (JWST) è stato in grado di rilevare nel 2023 la radiazione infrarossa emessa dalla proto-galassia (quasar) più distante mai osservata, mostrata nel secondo ingrandimento della figura: il suo nome è UHZ1 (acronimo di Ultra High redshift n. 1). Il primo ingrandimento mostra la stessa proto-galassia nei raggi X, utilizzando il telescopio Chandra. L'emissione di raggi X permette di stabilire la presenza di un buco nero con una massa stimata a 40 milioni di masse solari all'interno di questa sorgente¹³.



UHZ1 visto dai telescopi JWST e Chandra con il relativo codice colore. Fonte: Raggi X: NASA/CXC/SAO/Ákos Bogdán; Infrarosso: NASA/ESA/CSA/STScI; Elaborazione delle immagini: NASA/CXC/SAO/L. Frattare e K. Arcand; Codice colore: <https://chandra.harvard.edu/photo/2023/uhz1/>.

¹³Fonte: Goulding, Greene, Setton e Labbe, UNCOVER: The Growth of the First Massive Black Holes from JWST/NIRSpec-Spectroscopic Redshift Confirmation of an X-Ray Luminous AGN at $z = 10.1$, *The Astrophysical Journal*, vol. 955 (2023).

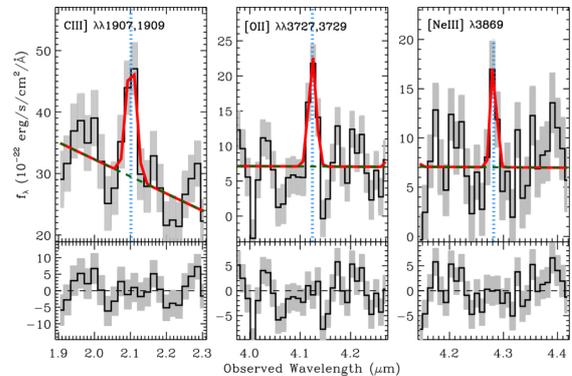
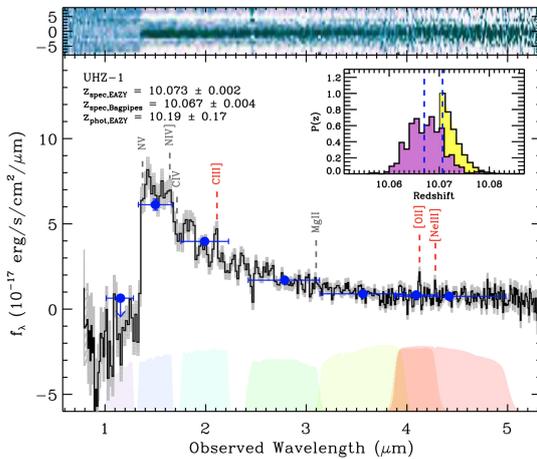
11.1 L'ammasso Abell 2744

Rispondete alle seguenti domande, giustificando ciascuna di esse.

- Determinare la velocità con cui l'ammasso Abell 2744 si muove rispetto a noi. Questa velocità è dovuta al moto dell'ammasso nello spazio circostante?
- Determinare la distanza che ci separa dall'ammasso Abell 2744. È all'interno o all'esterno del raggio di Hubble?
- Che tipo di effetto di lente gravitazionale crea questo ammasso?

11.2 Distanza del Quasar UHZ1

Il primo grafico in basso, a sinistra, mostra lo spettro della radiazione infrarossa proveniente da UHZ1 (intensità della radiazione in funzione della lunghezza d'onda osservata λ_0), dove è possibile osservare i picchi di emissione di alcuni elementi chimici caratteristici. In particolare, gli ingrandimenti a destra illustrano i picchi osservati del carbonio (CIII), dell'ossigeno (OII) e del neon (NeIII) e, per ciascuno di questi tre elementi, sono indicate le rispettive lunghezze d'onda misurate in laboratorio (λ) in Angstrom. ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$).



Fonte: Goulding et al. *The Astrophysical Journal* 955 <https://arxiv.org/abs/2308.02750> (2023).

- Leggendo dal grafico il valore della lunghezza d'onda osservata per la linea del neon (NeIII), calcolare il redshift di UHZ1.
- Questa sorgente si trova all'interno o all'esterno del raggio di Hubble? Giustificate e spiegate la risposta utilizzando le formule.

- c) Assumendo un universo costituito interamente da materia, stimare la distanza di attraversamento di UHZ1. Fornire il risultato in Mpc e al.
- d) Sempre ipotizzando un universo costituito interamente da materia, quale frazione dell'età dell'universo avrebbe impiegato la luce di UHZ1 per raggiungerci?
- e) Sempre ipotizzando un universo costituito interamente da materia, qual è la distanza comovente di UHZ1? Dare la risposta in Mpc e confrontarla con D_T della stessa sorgente, calcolata al punto (c).

11.3 Il buco nero UHZ1

- a) Come vengono classificati i buchi neri e a quale classe appartiene UHZ1?
- b) Quali sono (1) il raggio di Schwarzschild e (2) la densità di questo buco nero? Confrontate la densità trovata con quella dello zucchero filato. ($\rho_{\text{zucchero filato}} = 0,59 \text{ kg/m}^3$).
- c) Calcolate la temperatura di questo buco nero. Se non avesse un disco di accrescimento, potrebbe perdere massa per evaporazione?

Spiegazione

L'individuazione di questo buco nero, a una tale densità e a una tale distanza, è stata una scoperta fondamentale per comprendere la formazione dei buchi neri supermassivi (SMBH) nei nuclei delle galassie odierne, una questione che è stata dibattuta per molti anni.

La presenza di sorgenti di buchi neri supermassicci – “freddi” e a densità relativamente bassa – già al momento della formazione delle prime strutture dell'universo indica che questi nuclei si sono formati dal collasso gravitazionale di grandissime quantità di materia *prima* della formazione delle prime stelle, dando origine a buchi neri giganti *senza* avviare la combustione nucleare tipica delle stelle. Si ritiene che questi primi buchi neri, noti come DCBH (Direct Collapse Black Holes), siano i “semi” che si sono poi evoluti in OBG e quindi, attraverso collisioni successive, nelle galassie che vediamo oggi, come mostrato nella figura seguente.

Il video seguente (in inglese) spiega il significato della scoperta del quasar UHZ1: <https://www.youtube.com/watch?v=hxcUy-cBVcI>.

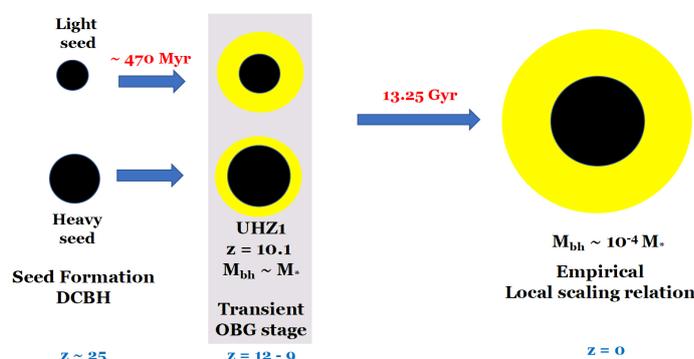
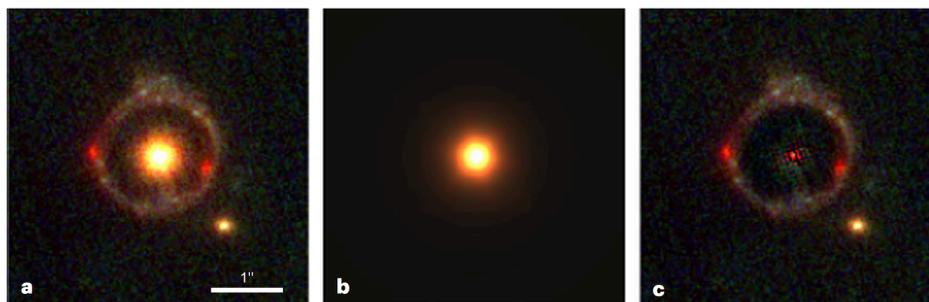


Diagramma che mostra l'evoluzione dei buchi neri supermassivi dalla formazione delle prime strutture ($z > 20$) a oggi ($z = 0$). Il simbolo M_* indica la massa della Galassia, cioè $\sim 10^{12} M_\odot$. Fonte: Natarajan, Pacucci, Ricarte, Bogdan, Goulding e Cappelluti, First Detection of an Over-Massive Black Hole Galaxy UHZ1: Evidence for Heavy Black Hole Seed Formation from Direct Collapse, *Synthical* (2023).

Esercizio 12: Anello di Einstein visto con il JWST

La prima immagine dell'anello di Einstein ripresa dalla sonda James Webb è stata denominata ER1 (Einstein Ring n. 1) ed è mostrata nella figura seguente (immagine **a**): nell'immagine **b** si vede solo la galassia lente in primo piano, denominata ER1g (la g sta per "galassia"), mentre l'immagine **c** rappresenta solo l'anello quasi perfetto, denominato ER1r (la r sta per "ring", anello).



Fonte: Van Dokkum, P., Brammer, G., Wang, B. et al., *A massive compact quiescent galaxy at $z = 2$ with a complete Einstein ring in JWST imaging*. *Nat Astron* 8, 119–125 (2024). <https://doi.org/10.1038/s41550-023-02103-9>

Il diametro angolare misurato dell'anello è di $1,54''$. I redshift stimati della galassia sorgente deformata dall'anello e della galassia lente sono rispettivamente $z_s = 2,98$ e $z_l = 1,94$.

Da queste misure gli scienziati possono calcolare la massa della galassia lente. Poiché i redshift delle due galassie sono significativamente maggiori dell'unità, non è possibile utilizzare la legge di Hubble-Lemaître per calcolare le distanze coinvolte nel calcolo del

raggio di Einstein: in questo caso è necessario utilizzare le distanze angolari che, in un universo piatto, coincidono con le distanze di emissione di ciascuna galassia.

- a) Scrivere le formule per le distanze angolari della sorgente e della lente. Chiamatele rispettivamente

$$D_{As} = D_s(t_{em_s}) = D_{SO} \quad \text{e} \quad D_{Al} = D_l(t_{em_l}) = D_{LO}.$$

Senza fare calcoli, siete in grado di prevedere quale sia il più grande? Perché?

- b) Stimare il valore di queste distanze mediante calcolo numerico o utilizzando una delle seguenti calcolatrici numeriche: https://ned.ipac.caltech.edu/help/cosmology_calc.html e i parametri $\Omega_m = 0,30$, $\Omega_\Lambda = 0,70$ e $H_0 = 70 \cdot 10^3 \text{ m}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$.

- c) Dalle considerazioni fatte in (a), spiegare perché la distanza tra la sorgente e la lente da considerare è

$$D_{SL} = D_{SO} - \frac{1+z_l}{1+z_s} \cdot D_{LO}$$

quindi determinare il suo valore in base ai dati e ai risultati del punto (b).

- d) Determinare la massa della lente ER1g. Che tipo di materiale costituisce questa massa?
- e) Calcolate, in kpc, il raggio attorno alla galassia lente che delimita l'immagine dell'anello, che possiamo considerare come il raggio di ER1g.
- f) Utilizzando modelli di "formazione della massa iniziale", gli astrofisici hanno stimato che la massa stellare (luminosa) di ER1g presente nel raggio della galassia ER1g è $M_{lum} = 1,1 \cdot 10^{11} M_\odot$. Confrontare la massa totale di ER1g ottenuta al punto (d) con la sua massa stellare, calcolando il loro rapporto.

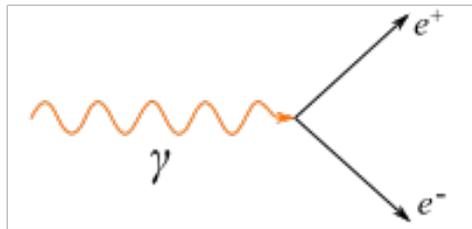
Spiegazione

L'osservazione di ER1 è di particolare importanza perché fornisce una misura della massa totale (non solo quella della materia luminosa) di una galassia a redshift relativamente alto. La massa totale della lente sembra essere fino a sei volte superiore alla massa stellare stimata, il che supera tutte le previsioni dei precedenti modelli astrofisici

7 Cronologia del Big Bang

Esercizio 1: Produzione di coppie

- a) Determinate l'energia minima E di un fotone¹⁴ in modo che possa essere convertita in
- una coppia elettrone/positrone ($E_{e/po}$);
 - una coppia protone/antiprotone ($E_{pr/a}$).



- b) Questi valori sono coerenti con i corrispondenti intervalli di energia al momento delle rispettive annichilazioni di particelle indicate nella teoria? Si sa perché le coppie particella/antiparticella non si sono annichilate completamente (oggi osserviamo protoni ed elettroni ma nessuna antiparticella)?
- c) Sapendo che la relazione tra l'energia di un fotone E e la sua lunghezza d'onda associata λ è $E = hc/\lambda$, calcolate la lunghezza d'onda corrispondente alle energie minime per produrre ogni coppia di particelle trovate in (a). In ogni caso, determinate il tipo di radiazione coinvolta (visibile, infrarosso, UV, ...).

N.B. La lunghezza d'onda associata all'energia di massa di una particella, divisa per 2π è chiamata *lunghezza d'onda di De Broglie* della particella: $\lambda = \lambda/2\pi$.

- d) Perché, anche se la sua energia lo permettesse, un fotone non potrebbe essere convertito in una coppia protone-neutrone?

Esercizio 2: Energia potenziale elettrica

Nel capitolo 6 abbiamo ottenuto la formula dell'energia potenziale *gravitazionale* di un sistema di due masse sferiche, m_1 e m_2 , i cui centri si trovano ad una distanza r .

¹⁴la particella associata ad un'onda elettromagnetica

- a) Riscrivete questa formula. Qual è il segno di questa energia?
- b) Usando l'analogia tra la legge di gravitazione universale e la legge di Coulomb, scrivete una formula simile a quella scritta in (a) che esprime l'energia potenziale *elettrica* di due cariche q_1 e q_2 , i cui centri sono a una distanza r . Qual è il segno di questa energia?
- c) Usate la formula in (b) e i dati dell'Appendice A per calcolare l'energia potenziale elettrica di un protone e un elettrone in un atomo di idrogeno. Ricavate quale sarebbe questa energia se, invece di avere un sistema protone-elettrone, avessimo un sistema protone-protone, alla stessa distanza?
- d) Supponendo che l'elettrone segua un'orbita circolare attorno al nucleo¹⁵ e, utilizzando la seconda legge di Newton, derivate la formula della sua velocità orbitale in funzione di e , r , m_e e k .
- e) Derivate le formule per la sua energia cinetica e per la sua energia meccanica.

Esercizio 3: Temperatura di ricombinazione

Immaginate di avere un plasma (un gas formato da particelle cariche) di protoni ed elettroni.

- a) Spiegate cosa significa che un insieme di un gran numero di particelle sia in *equilibrio termico*, e perché l'universo primordiale può essere considerato come un plasma in equilibrio termico.
- b) Utilizzando la relazione tra la temperatura e l'energia media delle particelle di un plasma (Appendice E) e il risultato dell'esercizio 2 (e), calcolate la temperatura minima che un plasma deve avere perché *tutti* i suoi atomi siano ionizzati.
- c) A quale periodo della storia termica dell'universo corrisponde questa temperatura?

Esercizio 4: Interazione forte

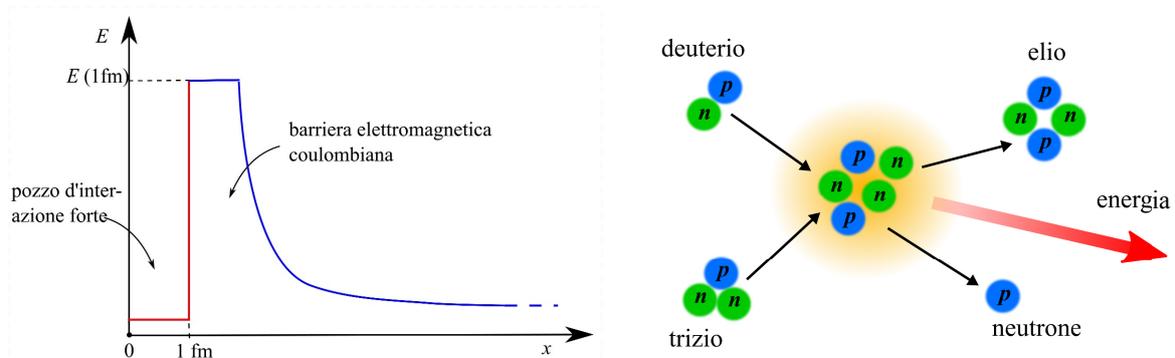
L'interazione forte (Appendice F) è una delle 4 interazioni fondamentali della natura. Non influisce direttamente sulla nostra vita quotidiana perché diventa significativa – e poi dominante – solo a partire da una scala di distanze molto piccola, dell'ordine del femtometro ($1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$).

¹⁵Questa situazione corrisponde al modello atomico di Bohr, un modello superato perché gli elettroni non hanno velocità e posizioni precise nell'atomo. Tuttavia, fornisce una buona stima dell'energia meccanica dell'elettrone.

- Quali oggetti conoscete a questa scala?
- Su quali particelle agisce l'interazione forte?
- Gli atomi sarebbero stabili se non fosse per l'interazione forte?
- Calcolate l'ordine di grandezza (ODG) dell'energia potenziale elettrica di due protoni che si avvicinano fino alla distanza in cui l'interazione forte diventa maggiore di quella elettrica, cioè ~ 1 fm.

L'ODG trovata in (d) è l'energia minima che i protoni dovrebbero avere per fondersi e formare un nucleo di elio (questo processo viene chiamato *fusione nucleare*), senza tener conto degli effetti quantistici. La fusione nucleare è un processo "difficile" a temperature ordinarie, perché bisogna fornire un'energia molto alta ai protoni per superare la *barriera coulombiana* di energia potenziale elettrica, responsabile della repulsione tra cariche dello stesso segno.

Ma una volta superata questa barriera, a scala di $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$, l'interazione forte tra nuclei domina e il protone cade nel *pozzo di energia potenziale* attrattiva di energia dell'interazione forte, responsabile dell'attrazione tra nuclei. Questo pozzo di energia potenziale è molto profondo e quindi la fusione nucleare libera enormi quantità di energia.



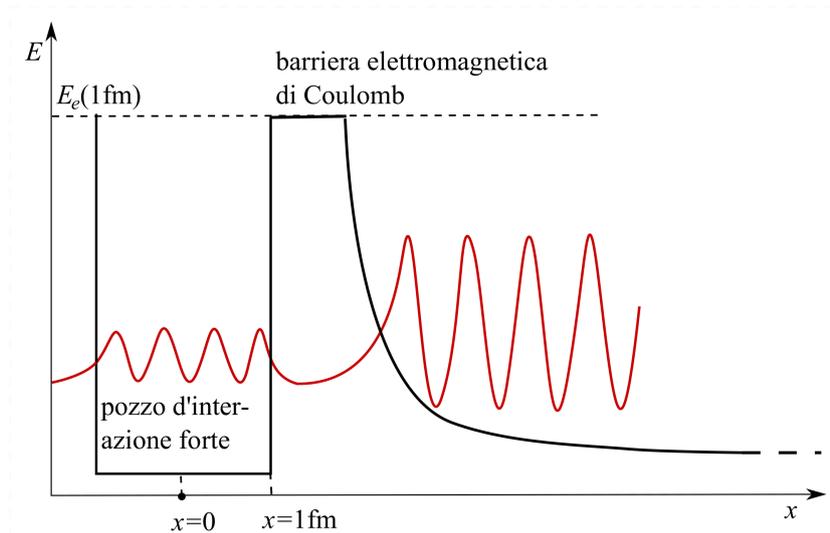
Esercizio 5: Temperatura associata alla barriera coulombiana

Immaginate di avere un plasma di protoni (nuclei di idrogeno). Usando la relazione tra la temperatura e l'energia media delle particelle di un gas di protoni (Appendice E), calcolate la temperatura minima del plasma primordiale perché un numero significativo dei suoi protoni passi la "barriera coulombiana" energetica trovata nell'esercizio precedente. Qual è l'ordine di grandezza di questa temperatura?

Esercizio 6: Temperatura di fusione nucleare ed effetto tunnel quantistico

In realtà, la fusione nucleare è possibile a temperature di diversi ODG inferiori rispetto a quelli ottenuti nell'esercizio 5, dove abbiamo considerato i protoni come corpuscoli che devono superare un potenziale (come un proiettile che deve oltrepassare un muro). Ma nel mondo microscopico subatomico, non ha senso considerare le particelle come corpi puntiformi, la cui posizione, velocità, accelerazione ed energia potrebbero essere teoricamente conosciute ad un istante arbitrariamente preciso. In realtà, il concetto di "corpo materiale" solido esiste solo su scala macroscopica.

- Leggete attentamente l'appendice G del corso.
- Sapendo che la temperatura di fusione all'interno del Sole è di 15 milioni di Kelvin, determinate l'energia dei protoni a questa temperatura (che è l'energia alla quale i protoni si fondono).
- Calcolate la distanza r_f alla quale, a questa energia i protoni possono avvicinarsi (la distanza alla quale iniziano a fondersi).
- Deducete la "dimensione" della "barriera coulombiana", cioè la lunghezza a del disegno sotto. Cosa possiamo concludere?



Esercizio 7: Unificazione della gravitazione e dell'elettromagnetismo

Confrontando le forze elettromagnetiche e gravitazionali tra un elettrone e un protone in un atomo di idrogeno, ma anche tra la Terra e la Luna (se potessimo togliere loro tutti gli elettroni), possiamo vedere che l'interazione gravitazionale è molto più debole di quella elettromagnetica (Serie 1, esercizio 6).

- a) Ora supponiamo di avere due particelle identiche, con la stessa carica $q_1 = q_2 = q$ sconosciuta, e la stessa massa $m_1 = m_2 = m$, anch'essa sconosciuta. Quale deve essere il rapporto m/q perché l'interazione gravitazionale tra queste due particelle sia della stessa intensità di quella elettromagnetica?
- b) Quale dovrebbe essere la massa m che le particelle dovrebbero avere se la loro carica fosse uguale alla carica fondamentale ($q = e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C) affinché l'interazione gravitazionale ed elettromagnetica tra loro sia della stessa intensità?
- c) A quale energia corrisponde questa massa? Fornite la risposta in J, poi in eV.

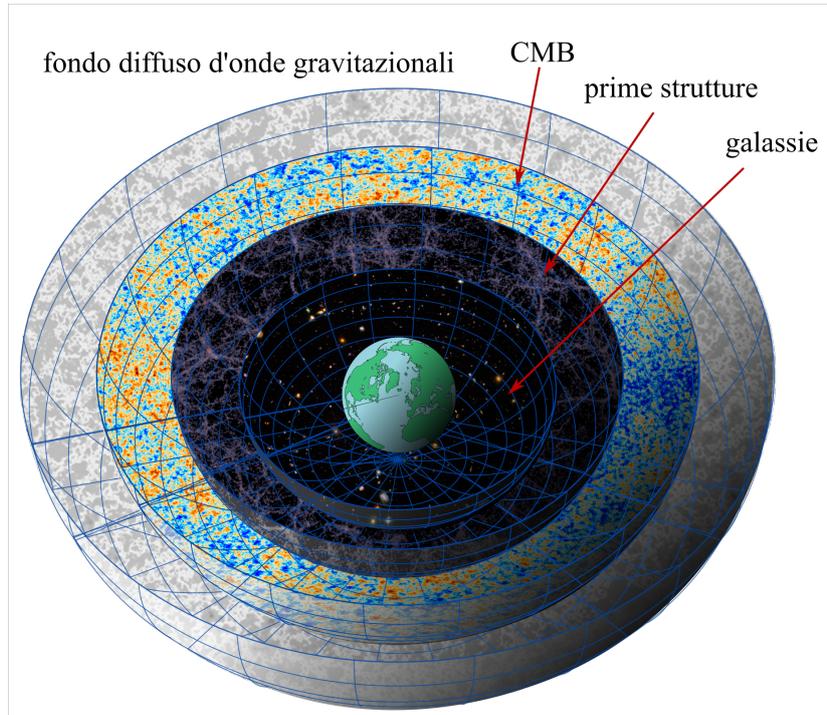
Ciò significa che se una carica elementare ha un'energia (cinetica e/o massa) di questo ordine, allora la sua interazione gravitazionale è paragonabile a quella elettromagnetica, e quindi anche a quella nucleare, poiché – a queste scale di energia – le interazioni elettriche e nucleari sono già unificate. Se l'energia della particella è più piccola, allora la gravitazione è più debole delle altre interazioni. È a partire da questa soglia energetica che la gravitazione si disaccoppia dal plasma primordiale.

- d) Il risultato ottenuto in (c) è coerente con il valore dato nella teoria per il disaccoppiamento gravitazionale? Commentate questo risultato.

Ricordiamo che al momento del disaccoppiamento elettromagnetico del plasma primordiale (380'000 anni dopo il Big Bang), le onde (elettromagnetiche) corrispondenti erano in grado di sfuggire e viaggiare liberamente nello spazio sotto forma del Cosmic Microwave Background (CMB): in quel momento l'universo divenne "trasparente" alle onde elettromagnetiche. Oggi, l'analisi di questa radiazione fossile (una "foto dell'universo bambino") ci permette di ricavare informazioni dall'universo al momento del disaccoppiamento (elettromagnetico), circa 380'000 anni dopo il Big Bang.

Allo stesso modo, al momento del disaccoppiamento gravitazionale, le onde corrispondenti a questa interazione – le onde gravitazionali – hanno smesso di interagire con il plasma primordiale e hanno potuto viaggiare liberamente: l'universo è diventato trasparente alla radiazione gravitazionale. Il rilevamento di questo tipo di onde è difficile, a causa della loro debolezza (dovuta alla natura stessa della gravitazione). Ma, per la

stessa ragione, un rilevamento del fondo cosmologico diffuso delle onde gravitazionali ci permetterebbe di stabilire un ritratto dell'universo all'epoca del disaccoppiamento gravitazionale, $t = 10^{-43}$ s dopo il Big Bang.



Esercizio 8: Vero o falso ?

Giustificate ogni risposta.

1. La densità di energia sotto forma di radiazione era dominante per redshift $z < 10$.
2. Nell'equazione di Friedmann, attualmente il termine della costante cosmologica domina l'espansione dell'universo.
3. Con l'espansione, la densità energetica della radiazione diminuisce meno rapidamente della densità della materia.
4. La densità dell'energia del vuoto rimane costante nonostante l'espansione dell'universo.
5. L'universo di oggi è pieno di tutte le particelle e antiparticelle prodotte durante il Big Bang.

6. La nucleosintesi primordiale ha avuto luogo dopo la ricombinazione: gli atomi di idrogeno e/o deuterio si sono fusi per creare atomi con un numero atomico superiore.
7. Durante la nucleosintesi primordiale, sono stati prodotti tutti gli elementi oggi esistenti più pesanti dell'idrogeno.
8. La maggior parte dell'elio presente oggi nell'universo è stato prodotto nelle stelle.
9. L'abbondanza di elio osservata è una conferma del modello del Big Bang.
10. Tutta la materia, barionica o no, si è separata dal plasma primordiale nello stesso momento, dopo la ricombinazione.
11. Gli *anni bui* sono il periodo dell'evoluzione dell'universo in cui la radiazione elettromagnetica è trascurabile.
12. Le prime stelle formatesi dopo il Big Bang erano molto più massive delle stelle che vediamo oggi.
13. La reionizzazione è avvenuta dopo il disaccoppiamento a causa di una breve fase di contrazione dell'universo.

8 Onde gravitazionali

Promemoria: Le formule seguenti mettono in relazione la lunghezza d'onda λ , il periodo T , la frequenza f e la velocità di propagazione v di un'onda.

$$f = 1/T \quad \lambda \cdot f = \lambda/T = v .$$

Notazione: In questa serie, chiamiamo velocità angolare di un sistema binario

$$\omega = \omega_{\text{sys}} = \frac{2\pi}{T_{\text{sys}}} = 2\pi \cdot f_{\text{sys}}$$

dove T_{sys} è il periodo di rotazione del sistema e $f_{\text{sys}} = T_{\text{sys}}^{-1}$ la sua frequenza, distinta

- dal periodo $T = T_{\text{gw}}$ e
- dalla frequenza $f = f_{\text{gw}} = T^{-1}$

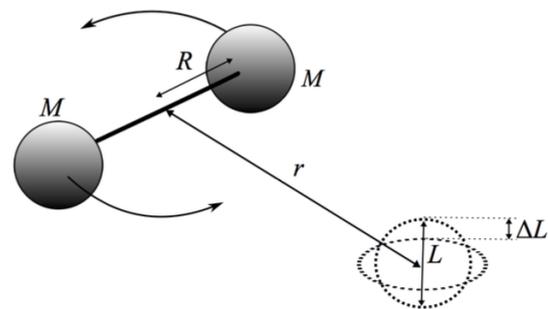
dell'onda gravitazionale emessa.

Esercizio 1: Il manubrio

Un'onda gravitazionale è generata da un sistema binario di due corpi sferici della stessa massa M che ruotano ad una distanza $d = 2R$ l'uno dall'altro.

L'onda si propaga e raggiunge un anello di materia "test" di diametro L , situato ad una distanza r dal centro di rotazione. L'onda viaggia nella direzione perpendicolare al piano dell'anello e produce una deformazione relativa su di esso, $\Delta L/L = h$ la cui formula è

$$h = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2G}{c^4} \frac{M}{r} \omega^2 R^2 \quad (1)$$



dove ω è la velocità angolare di rotazione delle masse intorno al loro centro¹⁶.

- Esprimete l'equazione (1) in funzione del raggio di Schwarzschild di M .
- Spiegate perché questa quantità è sempre minore di 1.
- Calcolate h per le onde generate dalla rotazione di un manubrio composto da due masse di una tonnellata ciascuna ad una distanza $d = 2$ m, e ad una frequenza $f = 1$ kHz, su un corpo ad una distanza $r = 10$ m.

¹⁶La posizione dell'anello rispetto all'asse di rotazione del sistema e il tipo di onda che lo attraversa (trasversale o longitudinale) non hanno alcuna influenza sull'entità della deformazione relativa h .

Esercizio 2: Velocità di rotazione relativistica: per quali oggetti?

La formula per l'ampiezza h di un'onda gravitazionale generata da un sistema binario simmetrico può essere scritta come il prodotto di due fattori adimensionali:

$$h = \frac{2GM}{c^2 r} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{2GM}{c^2 r} \cdot \left(\frac{\omega R}{c}\right)^2 .$$

Il primo fattore è dello stesso ordine (entro un fattore 4) dell'angolo di deviazione di un raggio di luce che passa a una distanza r da una massa M – sappiamo che il suo valore numerico è relativamente piccolo. Il secondo fattore è il rapporto tra la velocità di rotazione del sistema e c .

Consideriamo ora un sistema binario formato da una piccola massa m che ruota intorno a una grande massa M ($m \ll M$) ad una distanza R .

- a) Usando la seconda legge di Newton applicata al moto circolare uniforme di m , dimostrate che se la velocità di rotazione di m si avvicina a quella della luce, allora il raggio della sua traiettoria circolare R deve avvicinarsi alla metà del raggio di Schwarzschild della massa M :

$$v \approx c \quad \Rightarrow \quad R \approx \frac{r_S}{2} = \frac{GM}{c^2} .$$

- b) Quali oggetti hanno tutta la loro massa contenuta all'interno di r_S ?

Esercizio 3: Una deformazione facilmente misurabile?

Supponiamo che ci sia un sistema binario che ruota ad una velocità vicina a quella della luce ($v = \omega R \sim c$). Questo è possibile solo quando le due masse hanno una distanza paragonabile al loro raggio di Schwarzschild ($R \sim r_S$, esercizio 2).

- a) In questo caso, qual è l'ordine di grandezza del rapporto M/r per avere una deformazione relativa $h \sim 10^{-3}$, che è più facilmente misurabile (un anello di 1m subirebbe una deformazione dell'ordine di un millimetro)?
- b) Quali oggetti astrofisici esistono che hanno questo rapporto?

Esercizio 4: Frequenza e massa generatrice

- a) Spiegate perché la frequenza di un'onda gravitazionale è doppia rispetto alla frequenza di rotazione del sistema binario che la genera:

$$f_{\text{gw}} = 2 \cdot f_{\text{sys}} \quad \text{dove} \quad f_{\text{sys}} = 2\pi \omega_{\text{sys}} .$$

Affinché la radiazione sia il più intensa possibile, le masse del sistema devono ruotare a una velocità prossima a quella della luce ($v = \omega R \sim c$). Per ottenere questo risultato, devono ruotare a una distanza dell'ordine del loro raggio di Schwarzschild ($R \sim r_S$, si veda il risultato dell'esercizio 3) e quindi essere molto compatte.

- b) Utilizzando la relazione tra la massa e il raggio di Schwarzschild di un corpo e il risultato del punto (a), dimostrate che la formula che mette in relazione l'ODG della frequenza d'onda $f = f_{\text{gw}}$ e la massa dei componenti del sistema M è

$$f \sim \frac{c^3}{2\pi G M} .$$

- c) Determinate la frequenza caratteristica delle onde gravitazionali emesse da un sistema di $10 M_{\odot}$.
- d) Eseguite lo stesso calcolo per un sistema di buchi neri supermassivi di $10^6 M_{\odot}$.

Esercizio 5: Variazione della distanza di una stella

Tra le onde gravitazionali più intense che potrebbero provenire da oggetti nella nostra galassia ($r \sim \text{kpc}$) ci sono quelle dovute alla fase finale del moto di rotazione di due buchi neri di una massa solare ciascuno, appena prima della loro collisione. In questa fase i buchi neri orbitano a una distanza dell'ordine del loro raggio di Schwarzschild, quindi a una velocità orbitale vicina a quella della luce ($v = \omega R \sim c$).

- a) Stimate quale sarebbe la deformazione relativa h in questo caso molto ottimistico.
- b) Quale sarebbe la variazione ΔL nella distanza tra la Terra e la stella più vicina, Proxima Centauri, causata dal passaggio di una tale onda?

Esercizio 6: Frequenza e dimensione del rivelatore

Ogni interferometro possiede una banda di frequenza per le quali è più adatto alla rivelazione delle onde gravitazionali, a seconda della sua lunghezza L . Infatti, se il periodo di oscillazione di un'onda è uguale o inferiore al tempo t impiegato dalla luce per attraversare lo strumento $t = L/c$, quando un fotone passa attraverso un braccio del interferometro, la distanza tra i due specchi varia più volte e quindi diversi contributi alla deformazione ΔL di segno diverso si sovrappongono, alterando il segnale. Un rivelatore

è considerato sufficientemente efficiente quando la durata t dell'attraversamento dello strumento è almeno 10 volte più piccola del periodo T dell'onda da rilevare:

$$t = \frac{L}{c} \leq 0,1 T .$$

- a) Utilizzando le considerazioni di cui sopra, scrivete una formula che dia la massima frequenza che un'onda può avere per essere rilevabile da uno strumento di dimensione L .
- b) Quale L è necessaria per rilevare un'onda di frequenza tra 10 Hz e 1 kHz? A quali oggetti astrofisici corrispondono questi valori di frequenza? Si possono costruire rivelatori di onde gravitazionali di queste dimensioni?
- c) L'interferometro spaziale LISA, che sarà lanciato in orbita eliocentrica nei prossimi decenni, ha dei "bracci" di 5 milioni di km. Quali frequenze sarà in grado di rilevare? A quali oggetti astrofisici corrispondono questi valori di frequenza?

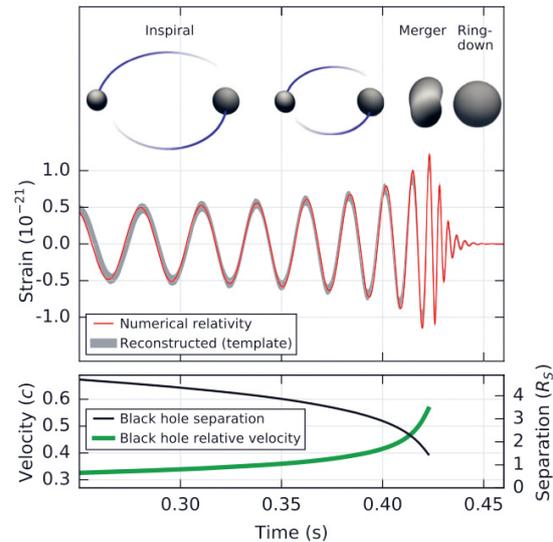
Esercizio 7: GW091415

La prima storica rilevazione di onde gravitazionali risale al 14 settembre 2015 (GW091415) dai due interferometri LIGO negli Stati Uniti. Si tratta della collisione tra due buchi neri di massa $M_1 = 29 M_\odot$ e $M_2 = 36 M_\odot$, ad una distanza $r = 400$ Mpc dalla Terra. Il buco nero ottenuto dopo la collisione è di $62 M_\odot$.

Siamo stati in grado di osservare:

1. il segnale degli ultimi 8 periodi di rotazione dei due buchi neri, in una banda di frequenza tra 35 e 150 Hz;
2. la collisione $f = 150$ Hz;
3. la fase di “ringdown”, durante la quale il buco nero finale di forma asimmetrica irradia onde per riacquistare una forma sferica.

La durata totale del segnale è stata di 0,45 s. Si veda la figura 2 di <https://www.nature.com/articles/s41586-019-1129-z>.



Fonte: B. P. Abbott et al., 2016, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Physical Review Letters, 116, 061102 .

Una simulazione di questo evento è visibile sul sito¹⁷:

<https://www.youtube.com/watch?v=flvFpFUzEXY>.

- a) Determinate il periodo di rotazione del sistema appena prima della collisione.
- b) A partire dalla distanza r della collisione, determinate il redshift corrispondente. Quanti anni fa è avvenuta questa collisione?
- c) Qual è il cambiamento di massa del sistema durante la collisione?
- d) Supponendo che tutta questa massa sia stata convertita in energia radiante gravitazionale, qual è l'energia irradiata in questa collisione? Date la risposta a $M_\odot \cdot c^2$ e in J .

¹⁷Ulteriori informazioni sono disponibili sul sito web della collaborazione LIGO: <https://www.ligo.org/detections/GW150914.php>.

- e) Qual è la potenza media irradiata durante il tempo osservato? Ci sono fenomeni noti con una potenza paragonabile?
- f) Calcolate la resa di questa collisione: $\eta = \Delta E_{\text{irradiata}}/E_{\text{tot}}$.
- g) La reazione di fusione nucleare più energetica è la seguente (produzione di un nucleo di elio): ${}^2\text{H} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + \text{protone} + 18,4 \text{ MeV}$. Calcolate la sua resa energetica e confrontatela con quella della collisione GW091415. La massa del protone è $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$.